Total No. of Printed Pages—10

2 SEM TDC MTH G 1

2 0 1 4

(May)

MATHEMATICS

(General)

Course : 201

(Matrices, Ordinary Differential Equations and Numerical Analysis)

Full Marks : 80

Pass Marks : 32

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

GROUP—A

(Matrices)

(*Marks* : 20)

1. *(a)* প্ৰাথমিক পাতনিৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define elementary matrix.

(b) তলৰ পাতনিটো অভিলম্ব ৰূপত প্ৰকাশ কৰি তাৰ কোটি নিৰ্ণয় কৰা : 4

Find the rank of the following matrix by reducing it to normal form :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(c) দেখুওৱা যে

Show that

$$\text{rank}\,(AA^T) = \text{rank}\,A$$ 3

2. (a) দেখুওৱা যে তলৰ সমীকৰণকেইটা সুসংগত আৰু সমাধান কৰা : 5

Show that the following equations are consistent and solve them :

$$x + y + z = 9$$
$$2x + 5y + 7z = 52$$
$$2x + y - z = 0$$

(b) এটা বৰ্গ পাতনিৰ অভিলক্ষণ মূল আৰু অভিলক্ষণ ভেক্টৰৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1+1

Define characteristic roots and characteristic vectors of a square matrix.

(c) তলৰ পাতনিটোৰ বাবে কেলি-হেমিল্টনৰ সূত্ৰটো পৰীক্ষা কৰা : 5

Verify Cayley-Hamilton theorem for the following matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

অথবা / *Or*

দেখুওৱা যে এটা অনপ্ৰতিম পাতনিৰ পৰা বিপৰীত পাতনি কেলি-হেমিল্টন উপপাদ্যৰ পৰা নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি।

Show that the inverse of a non-singular matrix can be computed with the help of the Cayley-Hamilton theorem.

GROUP—B

(Ordinary Differential Equations)

(*Marks* : 30)

3. *(a)* অৱকলৰ প্ৰথম ক্ৰমৰ আদৰ্শগত আকাৰৰ ৰৈখিক সমীকৰণটো লিখা। 1

Write the standard form of linear equation of first-order differential equation.

(b) যি কোনো এটা সমাধান কৰা : 3

Solve any *one* :

(i) $\cos^2 x \dfrac{dy}{dx} + y = \tan x$

(ii) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = xy^2$

(c) যি কোনো এটা সমাধান কৰা : 3

Solve any *one* :

(i) $p^2y - p(xy+1) + x = 0$

(ii) $y = px + \sqrt{a^2p^2 + b^2}$

(d) প্ৰমাণ কৰা যে $\sin 2x$ আৰু $\cos 2x$ অৱকলনীয় সমীকৰণ $y'' + 4y = 0$ৰ সমাধান আৰু এই সমাধান দুটা ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ। 3

Prove that $\sin 2x$ and $\cos 2x$ are solutions of the differential equation $y'' + 4y = 0$ and these solutions are linearly independent.

4. (a) যি কোনো দুটা সমাধান কৰা : 3×2=6

Solve any *two* :

(i) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + 5y = 16e^{3x}$

(ii) $\dfrac{d^2s}{dt^2} + 4\dfrac{ds}{dt} + 13s = 0$

(iii) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 5y = 10\sin x$

(iv) $\dfrac{d^4y}{dx^4} - y = x\sin x$

(b) যি কোনো এটা সমাধান কৰা : 4

Solve any *one* :

(i) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}-4y=x^4$

(ii) $x^3\frac{d^3y}{dx^3}+2x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2y=10\left(x+\frac{1}{x}\right)$

(iii) $(x+2)^2\frac{d^2y}{dx^2}-4(x+2)\frac{dy}{dx}+6y=x$

5. (a) প্ৰথম অৱকলনীয় ৰাশি আঁতৰাই তলৰ সমীকৰণটো সমাধান কৰা : 5

Removing the first-order derivative, solve the following equation :

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4x\frac{dy}{dx}+(4x^2-3)y=e^{x^2}$$

অথবা / Or

স্বতন্ত্ৰ চলক সলনি কৰি সমাধান কৰা :

Solve by changing the independent variable :

$$(1+x^2)^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x(1+x^2)\frac{dy}{dx}+4y=0$$

(b) প্ৰাচল ভেদ নিয়মেৰে

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = X$$

সমীকৰণটো সমাধান কৰা, য'ত P, Q আৰু X হৈছে xৰ ফলন। 5

Apply the method of variation of parameters to solve the equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = X$$

where P, Q and X are functions of x.

অথবা / Or

যদি $y = x$;

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x(1+x)\frac{dy}{dx} + 2(1+x)y = x^3$$

সমীকৰণটোৰ এটা বিশেষ সমাধান; ইয়াৰ সাধাৰণ সমাধান উলিওৱা।

If $y = x$ is a particular solution of

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x(1+x)\frac{dy}{dx} + 2(1+x)y = x^3$$

find the general solution.

GROUP—C

(Numerical Analysis)

(*Marks* : 30)

6. *(a)* নিউটন-ৰাফ্চন পদ্ধতিটোৰ অভিসাৰিতা চৰ্ত লিখা। 1

Write the condition of convergence of Newton-Raphson method.

(b) বীজগণিতীয় সমীকৰণ সমাধানৰ বাবে দ্বি-বিভাজন পদ্ধতি বৰ্ণনা কৰা। 4

Describe bisection method for solving an algebraic equation.

অথবা / *Or*

পুনৰুক্তি পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ সমীকৰণটোৰ এটা মূল নিৰ্ণয় কৰা :

Find one root of the following equation by iterative method :

$$2x - \log_{10} x = 7$$

(c) 25ৰ ঘনমূল নিৰ্ণয় কৰাৰ বাবে নিউটন-ৰাফ্চন প্ৰণালী প্ৰয়োগ কৰা। 5

Apply Newton-Raphson method to find the cube root of 25.

অথবা / *Or*

ৰেগুলা ফলচি পদ্ধতি প্ৰয়োগ কৰি তলৰ সমীকৰণটোৰ বাস্তৱ মূল তৃতীয় দশমিক স্থানলৈ শুদ্ধ মান নিৰ্ণয় কৰা :

$$x^3 - 9x + 1 = 0$$

Find the real root of the equation, $x^3 - 9x + 1 = 0$ by regula falsi method, correct to three places of decimal.

(*d*) একঘাত সমীকৰণ প্ৰণালী সমাধানৰ বাবে গাউছৰ অপনয়ন পদ্ধতি বৰ্ণনা কৰা। 5

Describe the solution of system of linear equations by Gauss elimination method.

অথবা / *Or*

গাউছ্-জৰ্ডান পদ্ধতিৰে সমাধান কৰা :

Solve by Gauss-Jordan method :

$$x + y + z = 9$$
$$2x - 3y + 4z = 13$$
$$3x + 4y + 5z = 40$$

7. (*a*) দেখুওৱা যে

Show that

$$\Delta = E - 1$$ 2

(*b*) নিউটনৰ অগ্ৰগামী অন্তৰ্বেশন সূত্ৰটো প্ৰতিপন্ন কৰা। 5

Deduce Newton's forward interpolation formula.

অথবা / Or

দিয়া আছে

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	1	8	27	64	125	216	343	512

তেন্তে $f(7\cdot5)$ নিৰ্ণয় কৰা।

Given

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	1	8	27	64	125	216	343	512

then find $f(7\cdot5)$.

(c) ট্ৰেপিজিয়ামৰ সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি তলৰ সম্বন্ধটোৰ পৰা π ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা : 5

Obtain the value of π by using trapezoidal rule from the relation :

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

অথবা / Or

দিয়া আছে

x	1	3	4	6	10
$f(x)$	0	18	48	180	900

তেন্তে লাগ্ৰাঞ্জৰ অন্তৰ্বেশন সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি $f(5)$ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

Given

x	1	3	4	6	10
$f(x)$	0	18	48	180	900

then find the value of $f(5)$ by using Lagrange's interpolation formula.

(d) চিম্পচনৰ $\frac{1}{3}$ পদ্ধতিটো প্ৰতিপন্ন কৰা। 3

Deduce Simpson's $\frac{1}{3}$ rule.

★★★