Total No. of Printed Pages—8

2 SEM FYUGP MINMTH2

2024

(May/June)

MATHEMATICS

(Minor)

Paper : MINMTH2

(Real Analysis)

Full Marks : 80
Pass Marks : 24

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

1. *(a)* অগণন সংহতিৰ এটা উদাহৰণ দিয়া। 1

Give an example of an uncountable set.

(b) বোলজানো-ৱেইৰষ্ট্ৰাচৰ উপপাদ্য লিখা। 2

Write the statement of Bolzano-Weierstrass theorem.

(c) দেখুওৱা যে $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ সংহতিটো গণনাযোগ্য হয়। 3

Show that the set $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ is denumerable.

(d) যদি $a \in \mathbb{R}$ আৰু $a \neq 0$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $a^2 > 0$. 4

If $a \in \mathbb{R}$ and $a \neq 0$, then prove that $a^2 > 0$.

2. (a) $\mathbb{R}$ ৰ সম্পূৰ্ণতা ধৰ্ম লিখা। 1

Write completeness property of $\mathbb{R}$.

(b) $\mathbb{Z}$ ৰ সীমাবিন্দুৰ সংহতি লিখা। 1

Write the set of limit points of $\mathbb{Z}$.

(c) যদি $a, b \in \mathbb{R}$, তেন্তে দেখুওৱা যে

If $a, b \in \mathbb{R}$, then show that

(i) $||a| - |b|| \leq |a - b|$

(ii) $|a - b| \leq |a| + |b|$ 2+2=4

(d) প্ৰমাণ কৰা যে যদি $x \in \mathbb{R}$, তেন্তে $n_x \in \mathbb{N}$ এনেকুৱা যে $x \leq n_x$. 4

Prove that if $x \in \mathbb{R}$, there exists $n_x \in \mathbb{N}$ such that $x \leq n_x$.

অথবা / Or

তলৰ সংহতিটোৰ যদি সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান স্থিত হয়, তেন্তে সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান নিৰ্ণয় কৰা :

Find supremum and infimum if they exists of the following set :

$$\left\{ \frac{n}{n+1} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$$

3. *(a)* এটা ক্ৰমৰ সীমাৰ সূত্ৰ লিখা। 1

Define limit of a sequence.

(b) ক্ৰমৰ সীমাৰ সংজ্ঞা ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ সীমাবোৰ প্ৰতিষ্ঠা কৰা (যি কোনো এটা) : 2

Use the definition of the limit of a sequence to establish the following limits (any *one*) :

(i) $\lim\left(\frac{n}{n^2+1}\right)=0$

(ii) $\lim\left(\frac{2n}{n+1}\right)=2$

(c) প্ৰমাণ কৰা যে $\mathbb{R}$ ত থকা এটা ক্ৰমৰ সৰ্বাধিক এটা সীমা থাকিব পাৰে। 3

Prove that a sequence in $\mathbb{R}$ can have at most one limit.

(d) প্ৰমাণ কৰা যে প্ৰত্যেক অভিসাৰি ক্ৰম সীমিত হয়। এই উপপাদ্যটোৰ বিপৰীতটো সত্যনে? 4

Prove that every convergent sequence is bounded. Is converse of this theorem true?

অথবা / Or

প্ৰমাণ কৰা যে এটা সীমাবিন্দু থকা প্ৰতিটো সীমাবদ্ধ ক্ৰম অভিসাৰী।

Prove that every bounded sequence with a unique limit point is convergent.

4. (a) $\{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ক্ৰমৰ পৰিসৰ লিখা। 1

Write the range of the sequence $\{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(b) একস্বৰ অভিসৰণ উপপাদ্য লিখা। 2

Write the statement of monotone convergence theorem.

(c) প্ৰমাণ কৰা যে

Prove that

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = 0$$ 3

অথবা / *Or*

নিৰ্ণয় কৰা

Find

$$\lim_{n \to \infty} x_n$$

য'ত

where

$$x_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^{n-1}}$$

(d) স্কুইজৰ উপপাদ্য প্ৰমাণ কৰা। 4

Prove Squeeze theorem.

(e) ক'চিৰ অভিসৰণৰ মাপকাঠি উল্লেখ কৰা আৰু প্ৰমাণ কৰা। 5

State and prove Cauchy's convergence criterion.

অথবা / *Or*

ধৰা হ'ল $X = \{x_n\}$ আৰু $Y = \{y_n\}$ দুটা বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ৰম একাদিক্ৰমে x আৰু y লৈ অভিসাৰি হয়। তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $X+Y$ আৰু XY একাদিক্ৰমে $x+y$ আৰু xy লৈ অভিসাৰি হয়।

Let $X = \{x_n\}$ and $Y = \{y_n\}$ be sequences of real numbers that converges to x and y respectively. Then prove that the sequences $X+Y$ and XY converges to $x+y$ and xy respectively.

5. (a) অসীম শ্ৰেণীৰ অভিসৰণৰ বাবে প্ৰয়োজনীয় চৰ্ত লিখা। 1

Write the necessary condition for the convergence of an infinite series.

(b) এটা বিকল্প শ্ৰেণীৰ উদাহৰণ লিখা। 1

Give an example of an alternating series.

(c) দোলনীয় শ্ৰেণীৰ এটা উদাহৰণ লিখা। 1

Give an example of oscillating series.

(d) শ্ৰেণীৰ বাবে ক'চিৰ সাধাৰণ অভিসৰণ নীতি উল্লেখ আৰু প্ৰমাণ কৰা। 5

State and prove Cauchy's general principle of convergence for series.

(e) প্ৰমাণ কৰা যে ধনাত্মক পদৰ গুণোত্তৰ শ্ৰেণী $1+r+r^2+r^3+\ldots$, $r<1$ৰ বাবে অভিসাৰি আৰু $+\infty$ লৈ অপসাৰি $r\geq 1$ৰ বাবে। 5

Prove that the positive term of geometric series $1+r+r^2+r^3+\ldots$ converges for $r<1$ and diverges to $+\infty$ for $r\geq 1$.

অথবা / *Or*

দেখুওৱা যে

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2},\quad x\in[0, 1]$$

শ্ৰেণীৰ বাবে $x=0$ত পদে পদে অৱকলন কৰিব নোৱাৰি।

Show that the series for which

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2},\quad x\in[0, 1]$$

cannot be differentiated term-by-term at $x=0$.

6. (a) দেখুওৱা যে $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ শ্ৰেণীটো অভিসাৰি। 3

Show that the series $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ is convergent.

(b) $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}+\ldots$ শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা। 3

Examine the convergence of the series

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}+\ldots$$

7. তলৰ যি কোনো তিনিটা শ্ৰেণীৰ বাবে অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা : $4\times3=12$

Test any *three* from the following series for convergence :

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+1}-n\right)$

(b) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}\tan\frac{1}{n}$

(c) $\frac{1.2}{3^2.4^2}+\frac{3.4}{5^2.6^2}+\frac{5.6}{7^2.8^2}+\ldots$

(d) $2x+\frac{3x^2}{8}+\frac{4x^3}{27}+\ldots\ (x>0)$

(e) $\frac{1^2}{2}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\ldots$

8. *(a)* চৰ্তযুক্ত অভিসাৰি শ্ৰেণীৰ এটা উদাহৰণ লিখা। 1

Write an example of conditional convergent series.

(b) nতম পদ $\left(\frac{n!}{n^n}\right)$ শ্ৰেণীৰ বাবে আচৰণ পৰীক্ষা কৰা। 3

Investigate the behaviour of the series whose nth term is $\left(\frac{n!}{n^n}\right)$.

★★★