

Total No. of Printed Pages—8

2 SEM FYUGP MTHC2

2024

(May/June)

MATHEMATICS

(Core)

Paper : MTHC2

(Real Analysis and Differential Equations)

Full Marks : 80

Pass Marks : 24

Time : 3 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions*

SECTION—A

(Real Analysis)

UNIT—I

1. (a) সত্য নে অসত্য লিখা :

Write True or False :

বন্ধ অন্তৰাল $[x, x]$ ক আমি একক সংহতি $\{x\}$ হিচাপে
লিখিব পাৰো।

1

The closed interval $[x, x]$ can be written
as the singleton set $\{x\}$.

(b) বাস্তৱ সংখ্যা (\mathbb{R})ৰ পূৰ্ণতাৰ ধৰ্মটো লিখা।

1

State the completeness property of \mathbb{R} .

- (c) যদি $a \in \mathbb{R}$ যাতে $a \cdot a = a$, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে হয় $a = 0$ অথবা $a = 1$. 2
 If $a \in \mathbb{R}$ such that $a \cdot a = a$, then prove that either $a = 0$ or $a = 1$.
- (d) যদি $a \in \mathbb{R}$ আৰু $a \neq 0$, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে $a^2 > 0$. 2
 If $a \in \mathbb{R}$ and $a \neq 0$, then prove that $a^2 > 0$.
- (e) সংহতিৰ সীমা বিন্দুৰ সংজ্ঞা আগবঢ়োৱা। বলজান'-ওৱাৰাচট্ৰেছৰ সূত্রটো (সংহতিৰ বাবে) লিখা। 1+1=2
 Define limit point of a set. Write the Bolzano-Weierstrass theorem for set.
- (f) ধৰা হ'ল S এটা \mathbb{R} ৰ অধিক আৰু উচ্চ পৰিবদ্ধ উপসংহতি আৰু $a \in \mathbb{R}$ যি কোনো এটা সংখ্যা। যদি $a + S = \{a + s : s \in S\}$, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে

$$\sup(a + S) = a + \sup S \quad 4$$

Let S be a non-empty subset of \mathbb{R} such that S is bounded above. Let $a \in \mathbb{R}$ be any number. If $a + S = \{a + s : s \in S\}$, then prove that

$$\sup(a + S) = a + \sup S$$

অথবা / Or

যদি $y > 0$, তেন্তে দেখুওৱা যে $n_y \in \mathbb{N}$ ৰ কাৰণে $n_y - 1 \leq y \leq n_y$.

If $y > 0$, then show that there exists $n_y \in \mathbb{N}$ such that $n_y - 1 \leq y \leq n_y$.

- (g) যদি x আৰু y দুটা যি কোনো বাস্তৱ সংখ্যা যাতে $x < y$, তেন্তে দেখুৱাব লাগে যে আমি এটা $r \in \mathbb{Q}$ পায় যাতে $x < r < y$. 3

If x and y are any real numbers with $x < y$, then show that there exists a rational number $r \in \mathbb{Q}$ such that $x < r < y$.

- (h) প্রমাণ কৰা যে বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি \mathbb{R} গণনীয় নহয়। 5
Show that the set of real numbers \mathbb{R} is not countable.

অথবা / Or

দেখুওৱা যে এনেকুৱা কোনো পৰিমেয় সংখ্যা r পোৱা নাযায় যাতে $r^2 = 2$.

Show that there does not exist a rational number r such that $r^2 = 2$.

UNIT—II

2. (a) একদিষ্ট অভিসৰী উপপাদ্যটো লিখা। 1
State monotone convergence theorem.
- (b) শ্ৰেণীৰ বাবে ক'চিৰ নিৰ্ণায়কটো লিখা। 1
State Cauchy criterion for series.
- (c) প্রমাণ কৰা যে এটা বাস্তৱ অনুক্রমৰ অতিবেছি এটা সীমাহে থাকিব পাৰে। 2
Prove that a sequence in \mathbb{R} can have at most one limit.

- (d) যদি x_n অনুক্রমটো x লৈ অভিসারী আৰু y_n অনুক্রমটো y লৈ অভিসারী হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $x_n y_n$ অনুক্রমটো xy লৈ অভিসারী হ'ব।

4

If x_n and y_n are two sequences such that x_n converges to x and y_n converges to y , then show that $x_n y_n$ converges to xy .

- (e) দেখুওৱা যে x_n অনুক্রমটো অপসারী য'ত

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

4

Show that the sequence x_n with

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

is divergent.

অথবা / Or

দেখুওৱা যে x_n অনুক্রমটো অভিসারী য'ত

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

Show that the sequence x_n with

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

is convergent.

- (f) $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ শ্ৰেণীটো অপসারী বুলি দেখুওৱা।

3

Show that the series $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ is divergent.

- (g) তলৰ যি কোনো এটা শ্ৰেণীৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা : 5
 Test the convergence of any *one* of the following series :

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} x^n, x > 0$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n + 1}$$

SECTION—B

(Differential Equations)

UNIT—III

3. (a) অৱকল সমীকৰণৰ বিশেষ সমাধান বুলিলে কি বুজা ? 1

What do you mean by particular solution of a differential equation?

- (b) তলৰ অৱকল সমীকৰণটোৰ এটা অনুকলনীয় উৎপাদক উলিওৱা : 1

Find an integrating factor of the following differential equation :

$$t^2 \frac{dx}{dt} + x = 1$$

- (c) তলৰ অৱকল সমীকৰণটো সমাধান কৰা : 2

Solve the following differential equation :

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$$

(6)

(d) দেখুওৱা যে, $f(x) = 2 \sin x + 3 \cos x$ হ'ল
 $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$ অৱকল সমীকৰণৰ এটা বহিৰ্লিখিত
সমাধান।

2

Show that $f(x) = 2 \sin x + 3 \cos x$ is an
explicit solution of the differential
equation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$$

(e) তলৰ যি কোনো তিনিটা অৱকল সমীকৰণ সমাধান কৰা :

3×3=9

Solve any *three* of the following
differential equations :

(i) $(xy + 2x + y + 2) dx + (x^2 + 2x) dy = 0$

(ii) $\frac{dy}{dx} + 3y = 3x^2 e^{-3x}$

(iii) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = -\frac{y^2}{x}$

(iv) $(y \sec^2 x + \sec x \tan x) dx +$
 $(\tan x + 2y) dy = 0$

UNIT—IV

4. (a) n মাত্ৰাবিশিষ্ট সমমাত্ৰ বৈখিক অৱকল সমীকৰণৰ সংজ্ঞা
দিয়া।

1

Define n th order homogeneous linear
differential equation.

- (b) যদি এটা ধ্ৰুৱক সহগযুক্ত সমমাত্র বৈখিক অৱকল সমীকৰণৰ সহায়ক সমীকৰণৰ মূল $2 \pm 3i$ হয়, তেন্তে অৱকল সমীকৰণটোৰ সাধাৰণ বা সামূহিক সমাধান নিৰ্ণয় কৰা। 1

If the auxiliary equation has the root $2 \pm 3i$, then write the general solution of the corresponding homogeneous linear differential equation with constant coefficients.

- (c) দ্বিমাত্রিক সমমাত্র বৈখিক অৱকল সমীকৰণৰ বাবে সমাৰোপন নীতিটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা। $1+3=4$

State and prove the principle of superposition for homogeneous linear differential equation of 2nd order.

- (d) n টা ফলনৰ এটা সংহতিৰ বাবে বনফ্লিয়ানৰ সংজ্ঞা আগবঢ়োৱা। দেখুওৱা যে,

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - 2 \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

অৱকল সমীকৰণৰ সমাধানকেইটা ক্ৰমে e^x , e^{-x} আৰু e^{2x} বৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ। অৱকল সমীকৰণটোৰ সামূহিক সমাধানটো লিখা। $1+3+1=5$

Define Wronskian for a set of n functions. Show that the solutions e^x , e^{-x} and e^{2x} of the differential equation

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - 2 \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

are linearly independent. Write its general solution.

(e) অনির্ণেয় সহগ পদ্ধতি ব্যবহার করি

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x^2$$

অবকল সমীকরণটো সমাধান করা।

6

Use the method of undetermined coefficients to solve $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x^2$.

অথবা / Or

প্রাচলর ভেদ/বিচরণ নিয়ম প্রয়োগ করি সমাধান করা

Use the method of variation of parameters to solve

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = \sec nx$$

(f) সমাধান করা (যি কোনো দুটা) :

4×2=8

Solve (any two) :

$$(i) x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + 4y = 2x^2$$

$$(ii) \frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{3x}$$

$$(iii) \frac{d^4y}{dx^4} + m^4y = 0$$
