Total No. of Printed Pages—11

2 SEM FYUGP STS C2

2024

(May/June)

STATISTICS

(Core)

Paper : STS C2

(Probability Theory and Statistical Distributions)

Full Marks : 60

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

1. তলত দিয়া বিকল্পবোৰৰ পৰা শুদ্ধ উত্তৰটো বাচি উলিওৱা : $1\times5=5$

Choose the correct answer from the following alternatives :

(a) দুটা পৰস্পৰ বহিৰ্ভূত ঘটনাৰ বাবে সম্ভাৱিতাৰ ছেদ সদায়

The probability of the intersection of two mutually exclusive events is always

(i) অসীম

infinity

(*ii*) শূন্য

zero

(*iii*) এক

one

(*iv*) ওপৰৰ এটাও নহয়

None of the above

(*b*) তিনিটা মুদ্ৰা একেলগে ওপৰলৈ নিক্ষেপ কৰিলে অতি বেছি এটা মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিতাটো হ'ল

In tossing three coins at a time, the probability of getting at most one head is

(*i*) $\frac{3}{8}$ (*ii*) $\frac{7}{8}$

(*iii*) $\frac{1}{2}$ (*iv*) $\frac{1}{8}$

(*c*) এটা পয়ঁচ বণ্টনৰ মূল সাপেক্ষে দ্বিতীয় ঘূৰ্ণক 12. তেতিয়া ইয়াৰ গড় সাপেক্ষে তৃতীয় ঘূৰ্ণক হৈছে

In a Poisson distribution, the second moment about origin is 12. Then its third moment about mean is

(*i*) 2

(*ii*) 3

(*iii*) 5

(*iv*) 10

(d) প্ৰসামান্য বণ্টনৰ প্ৰাচলৰ সংখ্যা হ'ল

The number of parameters of the normal distribution is

(i) 1

(ii) 2

(iii) 3

(iv) 4

(e) প্ৰথম প্ৰকাৰৰ বিটা চলকৰ পৰিসীমা হৈছে

The range of the beta variate of first kind is

(i) $(0, \infty)$

(ii) $(-\infty, \infty)$

(iii) $(0, 1)$

(iv) $(-1, +1)$

2. তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ দিয়া : $2\times6=12$

Answer the following questions :

(a) যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছি লোৱা কোনো এটা লিপইয়াৰত 53টা দেওবাৰ থকাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

What is the probability that a leap-year selected at random will contain 53 Sundays?

(b) যাদৃচ্ছিক চলক Xৰ চৰ্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতা ঘনত্ব ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া ।

Define conditional probability density function of a random variable X.

(c) এটা যাদৃচ্ছিক চলক Xৰ প্ৰান্তিক ঘনত্ব ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া ।

Define marginal density function of a random variable X.

(d) পয়ঁচ বণ্টনৰ ঘূৰ্ণক জনক ফলন নিৰ্ণয় কৰা ।

Obtain the moment generating function of Poisson distribution.

(e) প্ৰমাণ কৰা যে, যদি X আৰু Y অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক হয়, তেন্তে

Prove that if X and Y are continuous random variables, then

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

(f) যদি X এটা যাদৃচ্ছিক চলক আৰু $f(x)=c(1-x)$; $0<x<1$ হয়, তেন্তে মান নিৰ্ণয় কৰা—

If X is a random variable and $f(x)=c(1-x)$; $0<x<1$, then find the values of—

(i) c ;

(ii) $E(X)$.

3. (a) ধৰা হ'ল এটা পাত্ৰত 5টা ৰঙা আৰু 6টা ক'লা বল আছে। ইয়াৰ পৰা এবাৰত দুটাকৈ দুবাৰ বল লোৱা হ'ল। প্ৰথম বাৰত লোৱা বল দুটা ৰঙা আৰু দ্বিতীয় বাৰত লোৱা বল দুটা ক'লা হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা যদিহে দ্বিতীয়বাৰ লোৱাৰ আগেয়ে বলকেইটা পাত্ৰলৈ ঘূৰাই দিয়া নহয়। 4

An urn contains 5 red and 6 black balls. Two drawings of two balls in each draw are made. Find the probability of getting two red balls in the first draw and two black balls in the second draw if the balls are not returned to the urn after the first draw.

অথবা / *Or*

(b) সম্ভাৱিতাৰ গুণাত্মক তত্ত্বটোৰ সূত্ৰ লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

State and prove the multiplicative law of probability.

4. বেইজ তত্ত্বৰ সূত্ৰটো লিখা। দুটা পাত্ৰত তলত দিয়া ধৰণৰ ব'গা আৰু ক'লা বল আছে :

পাত্ৰ এক : 6 টা ব'গা আৰু 4 টা ক'লা বল আছে

পাত্ৰ দুই : 5 টা ব'গা আৰু 5 টা ক'লা বল আছে

এটা পাত্ৰ যাদৃচ্ছিক ধৰণে লৈ তাৰ পৰা এটা বল লোৱা হ'ল। এই বলটো যদি বগা হয়, তেন্তে ই প্ৰথম পাত্ৰৰ পৰা অহাৰ সম্ভাৱিতা কিমান? 2+3=5

State Bayes' theorem. Two urns, similar in appearance, contain following numbers of white and black balls :

Urn I : 6 white and 4 black balls
Urn II : 5 white and 5 black balls

One urn is selected at random and a ball is drawn from it. If the ball is white, what is the probability that it has come from the first urn?

5. (a) অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলকৰ সংজ্ঞা দিয়া। ধৰা হ'ল X এটা অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক যাৰ সম্ভাৱিতা ঘনত্ব ফলনটো তলত দিয়া ধৰণৰ :

Define continuous random variable. Let X be a continuous random variable with probability density function :

$$f(x)=\begin{cases} ax & ; \ 0 \le x \le 1 \\ a & ; \ 1 \le x \le 2 \\ -ax+3a & ; \ 2 \le x \le 3 \\ 0 & ; \ \text{otherwise} \end{cases}$$

(i) ধ্রুৱক aৰ মান নির্ণয় কৰা।

Determine the constant a.

(ii) গণনা কৰা :

Compute :

অথবা / Or

(b) দিয়া আছে X আৰু Yৰ যুটীয়া বিভাজন ফলন

The joint distribution of X and Y are given by

$$f(x, y) = 4xye^{-(x^2+y^2)};\ x \geq 0,\ y \geq 0$$

(i) X আৰু Yৰ প্ৰান্তিক সম্ভাৱিতা ঘনত্ব ফলন নিৰ্ণয় কৰা।

Find the marginal probability density functions of X and Y.

(ii) চৰ্তসাপেক্ষ ঘনত্ব ফলন X/Y আৰু Y/X নিৰ্ণয় কৰা।

Find the conditional density functions of X/Y and Y/X.

(iii) পৰীক্ষা কৰা X আৰু Y স্বতন্ত্ৰ হয়নে। 4+2+2=8

Test whether X and Y are independent.

6. (a) (i) এটা যাদৃচ্ছিক চলক Xৰ ঘূৰ্ণক জনক ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া। 2

Define moment-generating function of a random variable X.

(ii) প্ৰমাণ কৰা যে, কিছু সংখ্যক স্বতন্ত্ৰ চলকৰ যোগফলৰ ঘূৰ্ণক জনক ফলন, স্বতন্ত্ৰ চলকবোৰৰ নিজ নিজ ঘূৰ্ণক ফলনৰ পূৰণ ফলৰ সমান। 2

Prove that the moment generating function of the sum of a number of independent random variables is equal to the product of their respective moment generating functions.

(iii) ধৰা হওঁক Xৰ সম্ভাৱিতা ঘনত্ব ফলনটো

Let X has the probability density function

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-x/2}, & x>0\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

ইয়াৰ ঘূৰ্ণক জনক ফলনটো নিৰ্ণয় কৰা আৰু তাৰ পৰা মাধ্য আৰু প্ৰসৰণ নিৰ্ণয় কৰা। 4

Find its moment generating function and hence find its mean and variance.

অথবা / Or

(b) (i) কুমুলেন্ট জনক ফলন কি? দেখুওৱা যে

Define cumulant generating function. Show that

$$K_r\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} K_r(X_i)$$ 4

(ii) যাদৃচ্ছিক চলক এটাৰ বৈশিষ্ট্য ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া। যদি $\phi(t)$, যাদৃচ্ছিক চলক X ৰ বৈশিষ্ট্য ফলন হয় আৰু যদি $\mu_r' = E(X^r)$ স্থিত হয়, তেন্তে

Define characteristic function of a random variable. If X is some random variable with characteristic function $\phi(t)$, and if $\mu_r' = E(X^r)$ exists, then

$$\mu_r' = (-i)^r \left[\frac{\partial^r}{\partial t^r} \phi(t) \right]_{t=0}$$

1+3=4

7. (a) (i) দেখুওৱা যে, কিছুমান চৰ্ত সিদ্ধ হ'লে দ্বিপদ বণ্টনৰ পৰা পয়ঁচ বণ্টন পাব পাৰি। পয়ঁচ বণ্টনৰ দুটা উদাহৰণ দিয়া। 4+2=6

Derive Poisson distribution as a limiting form of binomial distribution. Give two examples of Poisson distribution.

(ii) যদি চলক X তলৰ সম্ভাৱিতা ভাৰ ফলনটোৰ সৈতে দ্বিপদ বণ্টনৰ অনুগামী হয়

If X follows binomial distribution with probability mass function

$$P(X = x) = {}^{100}C_x \left(\frac{1}{50}\right)^x \left(\frac{49}{50}\right)^{100-x};$$

$$x = 0, 1, 2, \ldots, 100$$

3

$P(1 \le x \le 3)$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

find the value of $P(1 \le x \le 3)$.

অথবা / Or

(b) (i) পৰাগুণোত্তৰ বণ্টনৰ সংজ্ঞা দিয়া। পৰাগুণোত্তৰ বণ্টনৰ সম্ভাৱিতাসমূহৰ পৌনঃপৌনিক সম্বন্ধ উলিওৱা। 2+2=4

Define hypergeometric distribution. Derive the recurrence relation for the probabilities of hypergeometric distribution.

(ii) যদি X এটা গামা চলক হয়, প্ৰাচল λৰ সৈতে, তেন্তে ইয়াৰ ঘূৰ্ণক জনক ফলন নিৰ্ণয় কৰা। ইয়াৰ পৰা নিৰ্ণয় কৰা যে প্ৰামাণিক গামা চলকৰ মান $e^{t^2/2}$ য'ত $\lambda \to \infty$. 5

If X is a gamma variate with parameter λ, obtain its m.g.f. Hence deduce that the m.g.f. of standard gamma variate tends to $e^{t^2/2}$ as $\lambda \to \infty$.

8. (a) (i) গুণোত্তৰ বণ্টনৰ সংজ্ঞা দিয়া আৰু ইয়াৰ ঘূৰ্ণক জনক ফলন উলিওৱা। গুণোত্তৰ বণ্টনৰ ঘূৰ্ণক জনক ফলনৰ পৰা মাধ্য আৰু প্ৰসৰণ নিৰ্ণয় কৰা। 1+1+2=4

Define geometric distribution and find its moment generating function. Derive the mean and variance of the geometric distribution from its moment generating function.

(ii) ধৰা হ'ল দুটা স্বতন্ত্ৰ যাদৃচ্ছিক চলক X_1 আৰু X_2 একে গুণোত্তৰ বণ্টনযুক্ত। দেখুওৱা যে $X_1/(X_1+X_2=n)$ৰ চৰ্তসাপেক্ষ বণ্টন একসমান আয়তৰতী। 5

Let the two independent random variables X_1 and X_2 have the same geometric distribution. Show that the conditional distribution of $X_1/(X_1+X_2=n)$ is uniform.

অথবা / Or

(b) (i) সূচকীয় বণ্টনৰ সংজ্ঞা দিয়া। সূচকীয় বণ্টনৰ ঘূৰ্ণক জনক ফলন নিৰ্ণয় কৰা আৰু ইয়াৰ পৰা বণ্টনটোৰ মাধ্য আৰু প্ৰসৰণ উলিওৱা। লগতে ইয়াৰ ওপৰত মন্তব্য দিয়া। 1+1+1+1=4

Define exponential distribution. Derive the m.g.f. of the distribution and find the mean and variance of exponential distribution from m.g.f. and comment on it.

(ii) দেখুওৱা যে, যদি $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, তেন্তে $\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2$, $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ হয়। 5

Show that if $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, then $\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2$ is $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

★★★