3 SEM FYUGP PHYC3A

2024

(December)

PHYSICS

(Core)

Paper : PHYC3A

(Mathematical Physics—I)

Full Marks : 60

Time : 2 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

1. তলত দিয়াসমূহৰ পৰা শুদ্ধ উত্তৰটো বাচি উলিওৱা : 1×4=4

Choose the correct answer from the following :

(a) $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y = e^{3x}$ অৱকলজ সমীকৰণটোৰ অৰ্ডাৰ আৰু ডিগ্ৰী হৈছে

The degree and order of the following differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y = e^{3x}$$

are

(i) 2 আৰু 2

2 and 2

(ii) 2 আৰু 1

2 and 1

(iii) 1 আৰু 2

1 and 2

(iv) ওপৰৰ এটাও নহয়

None of the above

(b) $\vec{B} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$ ভেক্টৰৰ ওপৰত $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টৰৰ প্ৰক্ষেপণৰ মান হ'ব

The projection of the vector $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ on the vector $\vec{B} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$ is

(i) $19\hat{k}$

(ii) $\frac{19}{9}\hat{j}$

(iii) 19

(iv) $\frac{19}{9}$

(c) যদি $\vec{A}$ এটা ছ'লেনয়'ড ভেক্টৰ, তেন্তে

If $\vec{A}$ is a solenoidal vector, then

(i) $\nabla^2 \vec{A} = 0$

(ii) $\nabla \cdot \vec{A} = 0$

(iii) $\nabla \times \vec{A} = 0$

(iv) ওপৰৰ এটাও নহয়

None of the above

(d) তলৰ কোনটো শুদ্ধ ?

Which of the following is correct?

(i) $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$

(ii) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$

(iii) $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = 0$

(iv) ওপৰৰ আটাইকেইটা

All of the above

2. তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ দিয়া : 2×5=10

Answer the following questions :

(a) দেখুওৱা যে $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ ৰ সীমাৰ অস্তিত্ব নাই।

Show that $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ does not exist.

(b) যদি $x(r, \theta) = r\cos\theta$ আৰু $y(r, \theta) = r\sin\theta$, জেকবিয়ান $J(r, \theta)$ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

Find the Jacobian $J(r, \theta)$ if $x(r, \theta) = r\cos\theta$ and $y(r, \theta) = r\sin\theta$.

(c) ডিৰাক ডেল্টা ফলনক কিদৰে আয়তাকাৰ ফলকৰ সীমা হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি?

How can Dirac's delta function be represented as limit of a rectangular function?

(d) যদি u_1, u_2, u_3 ত্ৰি-মাত্ৰিক কাৰ্ভিলিনিয়াৰ স্থানাংক প্ৰণালীৰ স্থানাংকসমূহ আৰু h_1, h_2, h_3 স্কেল-ফেক্টৰসমূহ, তেন্তে গোলাকাৰ স্থানাংক প্ৰণালীত u_1, u_2, u_3 আৰু h_1, h_2, h_3ৰ মান কিমান?

If u_1, u_2, u_3 represent the coordinates and h_1, h_2, h_3 the scale factors for the 3-dimensional curvilinear coordinate system, then what are the values of u_1, u_2, u_3 and h_1, h_2, h_3 for spherical polar coordinates?

(e) ডিৰাক ডেল্টা ফলনৰ বৈশিষ্ট্যৰ দ্বাৰা মান নিৰ্ণয় কৰা :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5t}\, \delta(t-2)\, dt$$

Evaluate using property of Dirac delta function :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5t}\, \delta(t-2)\, dt$$

3\. (a) (i) তলত দিয়া অৱকলজ সমীকৰণকেইটাৰ সমাধান উলিওৱা :

3+4=7

Solve the following differential equations :

1\. $(4x+1)^2 \frac{dx}{dy} = 1$

2\. $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{3x}$

(ii) $e^x \cos x$ আৰু $e^x \sin x$ এই ফলন দুটা ৰৈখিকভাৱে নিৰ্ভৰশীল হয়নে, Wronskian ব্যৱহাৰ কৰি পৰীক্ষা কৰা।

2

Check by using Wronskian whether the functions $e^x \cos x$ and $e^x \sin x$ are linearly independent.

(b) (i) যদি $z(x+y) = x^2 + y^2$, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 4\left(1 - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

3

If $z(x+y) = x^2 + y^2$, then show that

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 4\left(1 - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

(ii) লাগ্ৰাঞ্জৰ অনিৰ্ধাৰিত গুণক পদ্ধতিৰে কিদৰে এটি ফলকৰ চৰম মান নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি, বৰ্ণনা কৰা। 3

Describe how extremum values of a function can be determined by the method of Lagrange's undetermined multipliers.

অথবা / Or

সীমাৰদ্ধ সৰ্বাধিক আৰু ন্যূনতম মান কি? $xyz = a^3$ চৰ্ত সাপেক্ষে $x^2 + y^2 + z^2$ৰ ন্যূনতম মান নিৰ্ণয় কৰা। 1+5=6

What are constrained maxima and minima? Find the minimum value of $x^2 + y^2 + z^2$ subject to the condition $xyz = a^3$.

(c) (i) $\phi = x^2 - 2y^2 + 4z^2$ ফলনটোৰ (1, 1, −1) বিন্দুত $2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ দিশত দিশগত অৱকলন নিৰ্ণয় কৰা। 4

Find the directional derivative of $\phi = x^2 - 2y^2 + 4z^2$ at $(1, 1, -1)$ in the direction $2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$.

অথবা / Or

$xy^3z^2 = 4$ পৃষ্ঠৰ ওপৰত $(-1, -1, 2)$ বিন্দুত একক লম্ব নিৰ্ণয় কৰা।

Find the unit normal to the surface $xy^3z^2 = 4$ at $(-1, -1, 2)$.

(ii) প্ৰমাণ কৰা যে 3

Prove that

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{r}|}\right) = 0$$

(d) (i) এটি কণাৰ ওপৰত

$$\vec{F} = (2y+3)\hat{i} + xz\hat{j} + (yz-x)\hat{k}$$

বলে ক্ৰিয়া কৰাৰ ফলস্বৰূপে কণাটি C পথেৰে $t=0$ৰ পৰা $t=1$ লৈ গতি কৰোতে হোৱা কাৰ্যৰ মান নিৰ্ণয় কৰা। ইয়াত $x=2t$, $y=t$, $z=t^3$. 6

Find the work done if a particle is acted upon by a force

$$\vec{F} = (2y+3)\hat{i} + xz\hat{j} + (yz-x)\hat{k}$$

moving along a path C from $t=0$ to $t=1$. Here $x=2t$, $y=t$, $z=t^3$.

(ii) গ্ৰীণৰ উপপাদ্যটো লিখা। ইয়াক ভেক্টৰ ৰূপত কিদৰে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি? 3

State the Green's theorem. How is it expressed in vector form?

(e) $\int_0^1 \int_0^1 (x^2+y^2)\, dA$ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা য'ত dA xy-সমতলৰ এটি এলিমেণ্টেৰি কালি। 3

Evaluate $\int_0^1 \int_0^1 (x^2+y^2)\, dA$, where dA indicates an elementary area in the xy-plane.

(f) কাৰ্ভিলিনিয়াৰ স্থানাংক প্ৰণালীত স্কেলাৰ ফলন এটাৰ গ্ৰেডিয়েণ্টৰ প্ৰকাশৰাশি উলিওৱা। সেই ৰাশিৰ পৰা নলাকাৰ স্থানাংক প্ৰণালীত গ্ৰেডিয়েণ্টৰ ৰাশি উলিওৱা। 4+2=6

Find the expression for gradient of a scalar function in curvilinear coordinates. Hence derive the expression for gradient in cylindrical coordinates.

(g) (i) তলত দিয়া মেট্ৰিক্সটো হাৰ্মিচিয়ান হয়নে পৰীক্ষা কৰি চোৱা : 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2+3i & 3-i \\ 2-3i & 2 & 1-2i \\ 3-i & 1+2i & 5 \end{bmatrix}$$

Check whether the following matrix is Hermitian :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2+3i & 3-i \\ 2-3i & 2 & 1-2i \\ 3-i & 1+2i & 5 \end{bmatrix}$$

(ii) তলত দিয়া মেট্ৰিক্সটোৰ বিপৰীত মেট্ৰিক্সটো নিৰ্ণয় কৰা : 4

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Find the inverse of the following matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

★★★