

Total No. of Printed Pages—7

3 SEM FYUGP MTHC3B

2024

(December)

MATHEMATICS

(Core)

Paper : MTHC3B

(Group Theory—I)

Full Marks : 60

Time : 2 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions*

1. (a) $u(n)$ ত $n > 2$ বাবে $(n-1)$ ব বিপরীত কি হ'ব,
লিখা। 1.

Write the inverse of $(n-1)$ in $u(n)$, $n > 2$.

- (b) প্রমাণ করা যে এটা গোট G ত

$$(abc)^{-1} = c^{-1}b^{-1}a^{-1}, \forall a, b, c \in G \quad 2$$

Prove that in a group G

$$(abc)^{-1} = c^{-1}b^{-1}a^{-1}, \forall a, b, c \in G$$

- (c) প্রমাণ কৰা যে এটা গোটত একক মৌল অনন্য। 2

Prove that identity element in a group is unique.

- (d) প্রমাণ কৰা যে '+5' সাপেক্ষে গোট $G = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ এটা আবিলিয়ান গোট। 6

Prove that the set $G = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ is an Abelian group with respect to '+5'.

2. (a) $u(20)$ গোটৰ ক্ৰম কিমান, লিখা। 1

Write the order of the group $u(20)$.

- (b) গোটৰ এটা মৌলৰ নৰ্মেলাইজাৰৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define normalizer of an element in a group.

- (c) প্রমাণ কৰা যে গোট G ৰ কেন্দ্ৰ, G ৰ এটা উপগোট। 3

Prove that centre of a group G is a subgroup of G .

- (d) প্রমাণ কৰা যে এটা গোট G ৰ অবিভক্ত উপসংহতি H উপগোট হোৱাৰ প্ৰয়োজনীয় পৰ্যাপ্ত চৰ্তটো হ'ল

$$a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H \quad 6$$

Prove that a necessary and sufficient condition for a non-empty subset H of a group G to be a subgroup of G is that

$$a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$$

অথবা / Or

দুটা উপগোটৰ পূৰণৰ সংজ্ঞা দিয়া। যদি গোট G ৰ দুটা উপগোট H আৰু K হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে HK যো এটা G ৰ উপগোট হ'ব যদি আৰু যদিহে $HK = KH$ হয়।

$$1+5=6$$

Define product of two subgroups. If H and K be two subgroups of a group G , then prove that HK is a subgroup of G if and only if $HK = KH$.

3. (a) (1 3 5 6 7) বিন্যাসটো যুগ্ম নে অযুগ্ম নিৰ্ণয় কৰা। 1

Determine whether the permutation (1 3 5 6 7) is even or odd.

- (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ বিন্যাসটোৰ ক্রম উলিওৱা। 2

Find the order of the permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) ধরা হ'ল, H এটা গোট G ব উপগোট আৰু $a, b \in G$.
তেন্তে প্রমাণ কৰা যে—

(i) $Ha = Hb$, যদি আৰু যদিহে $ab^{-1} \in H$;

(ii) Ha এটা G ব উপগোট হ'ব যদি আৰু যদিহে $a \in H$. 6

Let H be a subgroup of a group G and $a, b \in G$. Then prove that—

(i) $Ha = Hb$ if and only if $ab^{-1} \in H$;

(ii) Ha is a subgroup of G if and only if $a \in H$.

অথবা / Or

ধরা হ'ল গোট G ব এটা মৌল a ব ক্রম n আৰু k এটা
ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। তেন্তে প্রমাণ কৰা যে

$$\langle a^k \rangle = \langle a^{\gcd(n, k)} \rangle \text{ আৰু } |a^k| = \frac{n}{\gcd(n, k)}$$

Let a be an element of order n in a group G and k be a positive integer. Then prove that

$$\langle a^k \rangle = \langle a^{\gcd(n, k)} \rangle \text{ and } |a^k| = \frac{n}{\gcd(n, k)}$$

(d) লেগ্ৰেঞ্জৰ উপপাদ্যটো উল্লেখ কৰি প্রমাণ কৰা। 1+6=7

State and prove Lagrange's theorem.

4. (a) ফেক্টৰ গোট G/H ৰ পৰিচয় মৌলটো লিখা। 1

Write the identity element of the factor group G/H .

(b) নির্ণয় কৰা : 1

Find :

$$U(8) \oplus U(10)$$

(c) যদি $G = Z_{18}$ আৰু $H = \langle 6 \rangle$, এটা G ৰ উপগোট, তেন্তে G/H নির্ণয় কৰা। 3

If $G = Z_{18}$ and $H = \langle 6 \rangle$ is a subgroup of G , then find G/H .

(d) প্রমাণ কৰা যে গোট G ৰ উপগোট H সাধাৰণ উপগোট হ'ব যদি আৰু যদিহে $xHx^{-1} \subseteq H$. 6

Prove that a subgroup H of a group G is normal subgroup of G if and only if $xHx^{-1} \subseteq H$.

অথবা / Or

ধৰা হ'ল G এটা সীমিত আবিলিয়ান গোট যাতে $P \mid O(G)$, য'ত P এটা মৌলিক সংখ্যা। তেন্তে প্রমাণ কৰা যে G ৰ অতি কমেও এটা মৌল থাকিব যাৰ ক্রম P হ'ব।

Let G be a finite Abelian group such that $P \mid O(G)$, where P is prime. Then prove that G has at least one element of order P .

5. (a) ধরা হ'ল f এটা গোট G ব পরা গোট G' লৈ হোম'মৰফিজম। তেন্তে প্রমাণ কৰা যে—

(i) $f(e) = e'$, য'ত e, e' ক্ৰমে G আৰু G' ব একক মৌল;

(ii) $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$, $\forall a \in G$;

(iii) যদি $O(a)$ সীমিত হয়, তেন্তে $O(f(a)) \mid O(a)$, য'ত $a \in G$.

5

Let f be a homomorphism from a group G into a group G' . Then prove that

(i) $f(e) = e'$, where e, e' are identity elements of G and G' respectively;

(ii) $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$, $\forall a \in G$;

(iii) if $O(a)$ is finite, then $O(f(a)) \mid O(a)$, where $a \in G$.

(b) প্রমাণ কৰা যে প্রতিটো গোট বিন্যাস গোটৰ সৈতে সমৰূপীত।

6

Prove that every group is isomorphic to a permutation group.

অথবা / Or

যদি $f : G \rightarrow G'$ এটা আচ্ছাদক হোম'মরফিজম য'ত $\ker f = K$, তেত্তে প্রমাণ কৰা যে $G' \cong G/K$.

If $f : G \rightarrow G'$ be an onto homomorphism with $\ker f = K$, then prove that $G' \cong G/K$.

★★★