Total No. of Printed Pages—7

3 SEM FYUGP GECMTH3B

2024

(December)

MATHEMATICS

(Generic Elective Course)

Paper : GECMTH3B

(Combinatorial Mathematics)

Full Marks : 60

Time : 2 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

1. তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

Answer the following questions :

(a) দ্বিতীয় প্ৰকাৰৰ ষ্টাৰলিং সংখ্যাটো লিখা। 1

Write the Stirling number of the second kind.

(b) পুনৰাবৃত্তিৰ অনুমতি নিদিলে 7টা বস্তুৰ গোটৰ পৰা 4টা বস্তু কিমান ধৰণে নিৰ্বাচন কৰিব পাৰি? 2

In how many ways can you select 4 objects from a set of 7 objects if repetition is not allowed?

(c) 3টা শিশুৰ মাজত 7টা একেধৰণৰ আপেল বিতৰণ কৰাৰ উপায়ৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা, যদিহে প্ৰতিটো শিশুৱে অন্তত এটা আপেল পায়। 2

Find the number of ways to distribute 7 identical apples among 3 children, if each child gets at least one apple.

(d) যদি ${}^nC_{r-1}=36$, ${}^nC_r=84$, ${}^nC_{r+1}=123$, তেন্তে n আৰু r ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা। 3

If ${}^nC_{r-1}=36$, ${}^nC_r=84$, ${}^nC_{r+1}=123$, then find the value of n and r.

(e) দ্বিপদ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি $(x+3)^4$ সম্প্ৰসাৰণ কৰা। 4

Expand $(x+3)^4$ using the binomial theorem.

অথবা / *Or*

প্ৰমাণ কৰা যে ${}^nC_r={}^nC_{n-r}$.

Prove that ${}^nC_r={}^nC_{n-r}$.

2. তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

Answer the following questions :

(a) 1, 2, 3 ৰ ডিৰেঞ্জমেন্টৰ সংখ্যা হ'ল _____।

(খালী ঠাই পূৰণ কৰা) 1

The number of derangements of 1, 2, 3, is _____.

(Fill in the blank)

(b) অন্তর্ভুক্তি আৰু বৰ্জনৰ নীতি ব্যৱহাৰ কৰি 1ৰ পৰা 100ৰ মাজৰ পূৰ্ণসংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা যিবোৰ 2, 3 বা 5 ৰে হৰণ কৰিব পাৰি। 2

Using the principle of inclusion and exclusion, find the number of integers between 1 to 100 that are divisible by 2, 3 or 5.

(c) এটা ক্ৰমবিন্যাসত inversion formula ই inversion formula ৰ সংখ্যা গণনা কৰাত কেনেদৰে সহায় কৰে, ব্যাখ্যা কৰা। 2

Explain how the inversion formula helps in counting the number of inversions in a permutation.

(d) যদি A আৰু B এটা সসীম সাৰ্বজনীন গোট U ৰ উপগোট হয়, তেতিয়া প্ৰমাণ কৰা যে

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$ 3

Let A and B be subsets of a finite universal set U. Then prove that

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

অথবা / Or

ডিৰেঞ্জমেন্টৰ সংজ্ঞা দিয়ক। 1, 2, 3, 4, 5ৰ ডিৰেঞ্জমেন্টৰ সংখ্যা গণনা কৰা।

Define derangement. Calculate the number of derangement of 1, 2, 3, 4, 5.

(e) 1 আৰু 500 ৰ মাজৰ কিমানটা পূৰ্ণসংখ্যাক (i) 3 বা 5 ৰে হৰণ কৰিব পাৰি আৰু (ii) 3 ৰে হৰণ কৰিব পাৰি কিন্তু 5 বা 6 ৰে হৰণ নহয়? 2+2=4

How many integers between 1 and 500 are (i) divisible by 3 or 5 and (ii) divisible by 3 but not by 5 or 6?

3. তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

Answer the following questions :

(a) এটা ক্ৰমৰ জেনেৰেটিং ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define generating function of a sequence.

(b) জেনেৰেটিং ফলন $(3+x)^3$ৰ সৈতে সংগতি ৰাখি ক্ৰমটো নিৰ্ণয় কৰা। 2

Find the sequence corresponding to the ordinary generating function $(3+x)^3$.

(c) $a = 1, 1, 1, 1, \ldots$ ক্ৰমটোৰ বাবে ঘাতীয় জেনেৰেটিং ফলনটো নিৰ্ণয় কৰা। 3

Find the exponential generating function for the sequence $a = 1, 1, 1, 1, \ldots$.

(d) $a_k = 2+3k$ হ'লে $\{a_k\}$ ক্ৰমটোৰ জেনেৰেটিং ফলন নিৰ্ণয় কৰা। 3

Find the generating function of a sequence $\{a_k\}$ if $a_k = 2+3k$.

(e) প্ৰমাণ কৰা যে যদি aৰ বাবে জেনেৰেটিং ফলন $f(x)$ আৰু bৰ বাবে জেনেৰেটিং ফলন $g(x)$ হয়, তেন্তে $a+b$ৰ বাবে জেনেৰেটিং ফলন $f(x)+g(x)$. 3

Prove that if $f(x)$ is the generating function for a and $g(x)$ is the generating function for b, then $f(x)+g(x)$ is the generating function for $a+b$.

অথবা / *Or*

3, −3, 3, −3, 3, −3, ... ক্ৰমৰ বাবে জেনেৰেটিং ফলনটো নিৰ্ণয় কৰা।

Find the generating function for the sequence 3, −3, 3, −3, 3, −3, ...

4. তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

Answer the following questions :

(a) যদি $a_1 = 2$, তেতিয়া $a_n = a_{n-1} + 3$ ক্ৰমৰ পৰৱৰ্তী দুটা পদ লিখা। 1

Write the next two terms of the sequence $a_n = a_{n-1} + 3$ with $a_1 = 2$.

(b) ধৰি $\{a_n\}$ এটা ক্ৰম যিয়ে পুনৰাবৃত্তিৰ সম্পৰ্ক $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ য'ত $n = 2, 3, 4, \ldots$ আৰু $a_0 = 3$, $a_1 = 5$ সম্পৰ্কক সন্তুষ্ট কৰে। a_2 আৰু a_3 নিৰ্ণয় কৰা। 2

Let $\{a_n\}$ be a sequence that satisfies the recurrence relation $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ for $n = 2, 3, 4, \ldots$ and suppose that $a_0 = 3$ and $a_1 = 5$. Find a_2 and a_3.

(c) $\{a_n\}$ ক্রমটো $n = 2, 3, 4, \ldots$ৰ বাবে পুনৰাবৃত্তি সম্পৰ্ক $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ ৰ সমাধান নেকি নিৰ্ণয় কৰা য'ত প্ৰতিটো অঋণাত্মক n ৰ বাবে $a_n = 3n$. 2

Determine whether the sequence $\{a_n\}$ is solution of the recurrence relation $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ for $n = 2, 3, 4, \ldots$ where $a_n = 3n$ for every non-negative n.

(d) $k \geq 1$ৰ বাবে $a_1 = 1,\ a_{k+1} = 3a_k + 1$ দ্বাৰা সংজ্ঞায়িত ক্ৰমৰ প্ৰথম পাঁচটা পদ লিখা। a_n ৰ বাবে সূত্ৰটো নিৰ্ণয় কৰা। 3

Write down the first five terms of the sequence defined by $a_1 = 1,\ a_{k+1} = 3a_k + 1$ for $k \geq 1$. Derive the formula for a_n.

অথবা / Or

$a_n = a_{n-1} + 3$ আৰু $a_1 = 3$ দ্বাৰা সংজ্ঞায়িত ক্ৰমৰ প্ৰথম পাঁচটা পদ লিখা লগতে a_n ৰ বাবে সূত্ৰটো নিৰ্ণয় কৰা।

Write down the first five terms of the sequence defined by $a_n = a_{n-1} + 3$ and $a_1 = 3$. Also derive the formula for a_n.

(e) প্ৰাৰম্ভিক অৱস্থা $a_0 = 1,\ a_1 = -2$ আৰু $a_2 = -1$ৰ সৈতে পুনৰাবৃত্তি সম্পৰ্ক $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$ ৰ সমাধান নিৰ্ণয় কৰা। 4

Find the solution to the recurrence relation $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$ with initial conditions $a_0 = 1,\ a_1 = -2$ and $a_2 = -1$.

5. তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

Answer the following questions :

(a) $P(0)$ আৰু $P(1)$ ৰ মান লিখা। 1

Write the value of $P(0)$ and $P(1)$.

(b) বাৰ্নছাইডৰ লেমা উল্লেখ কৰা। 1

State Burnside's lemma.

(c) পলিয়াৰ প্ৰথম আৰু দ্বিতীয় গণনা উপপাদ্যটো লিখা। 3

State the Polya's first and second enumeration theorem.

অথবা / Or

Polya গণনাত Necklace সমস্যাটো চমুকৈ বৰ্ণনা কৰা।

Briefly describe the Necklace problem in Polya counting.

(d) 4টা গুটি থকা হাৰ এটাৰ সুকীয়া ৰং গণনা কৰিবলৈ Polya's enumeration উপপাদ্য ব্যৱহাৰ উল্লেখ কৰা। 3

Use Polya's enumeration theorem to count distinct colouring of a necklace with 4 beads using colours.

(e) এটা সংখ্যা n ৰ পূৰ্ণসংখ্যা বিভাজন সংজ্ঞা লিখা। লগতে 6 ৰ সকলো পূৰ্ণসংখ্যা বিভাজন উল্লেখ কৰা। 4

Define the integer partition of a number n. Also find all integer partition of 6.

★★★