

Total No. of Printed Pages—8

1 SEM FYUGP MINMTH1

2024

(December)

MATHEMATICS

(Minor)

Paper : MINMTH1

(**Differential Calculus**)

Full Marks : 60 (80 for 2023 Batch)

Time : 2 hours (3 hours for 2023 Batch)

The figures in the margin indicate full marks for the questions

1. (a) কেতিয়া এটা ফলন f বন্ধ অন্তৰ $[a, b]$ ত অনবিচ্ছিন্ন হোৱা বুলি কোৱা হয়? 1

When is a function f said to be continuous in a closed interval $[a, b]$?

(b) বিচ্ছিন্নতাৰ প্ৰকাৰ লিখা, যদি $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ৰ অৱস্থিতি থাকে আৰু $f(a)$ ৰ সমান নহয়। 1

Write the type of discontinuity, if $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ exists but not equal to $f(a)$.

(c) (ϵ, δ) ব সংজ্ঞা ব্যবহার কবি, দেখুওবা যে

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2a \text{ য'ত } f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}, x \neq a. \quad 3$$

Using (ϵ, δ) definition, show that

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2a, \text{ where } f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}, x \neq a.$$

(d) মান নির্ণয় কবা :

2

Evaluate :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

(e) $f(x) = |x-1|$ ফলনটোৰ $x=1$ বিন্দুত অৱকলজীয়তাৰ পৰীক্ষা কৰা।

4

Examine the differentiability of the function $f(x) = |x-1|$ at $x=1$.

অথবা / Or

যদি $y = \sin^3 x$, তেন্তে y_n নির্ণয় কৰা।

If $y = \sin^3 x$, then find y_n .

2. (a) যদি $y = \cos 3x$, তেন্তে y_n ৰ মান লিখা।

1

If $y = \cos 3x$, then write the value of y_n .

(b) যদি $u = \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z}$, তেন্তে $\frac{\partial u}{\partial x}$ আৰু $\frac{\partial u}{\partial y}$ নির্ণয়

কৰা।

2

If $u = \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z}$, then find $\frac{\partial u}{\partial x}$ and $\frac{\partial u}{\partial y}$.

(c) যদি $y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$, তেন্তে দেখুওৱা যে

If $y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$, then show that

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+3)xy_{n+1} - (n+1)^2y_n = 0$$

4

অথবা / Or

যদি $u = \tan^{-1} \left(\frac{x^3 + y^3}{x-y} \right)$, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে

If $u = \tan^{-1} \left(\frac{x^3 + y^3}{x-y} \right)$, then prove that

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$$

(d) দুটা চলকৰ সমমাত্রাৰ ফলনৰ বাবে অয়লাৰৰ উপপাদ্যটো লিখা আৰু প্রমাণ কৰা।

4

State and prove Euler's theorem on homogeneous function of two variables.

অথবা / Or

যদি $u = e^{xyz}$, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে

If $u = e^{xyz}$, then prove that

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2) e^{xyz}$$

3. (a) $y = f(x)$ বক্রৰ (x_1, y_1) বিন্দুত অভিলম্বৰ সমীকৰণ লিখা। 1

Write the equation of normal to the curve $y = f(x)$ at the point (x_1, y_1) .

- (b) $y = x^2 + 1$ বক্রৰ $(3, 4)$ বিন্দুত স্পৰ্শকৰ নতি উলিওৱা। 1

Find the slope of the tangent to the curve $y = x^2 + 1$ at the point $(3, 4)$.

- (c) $y(x-2)(x-3) - x + 7 = 0$ বক্রটোৰ x -অক্ষত ছেদ কৰা বিন্দুত স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ উলিওৱা। 3

Find the equation of the tangent to the curve $y(x-2)(x-3) - x + 7 = 0$ at the point where it meets x -axis.

অথবা / Or

যি কোনো বিন্দুত বক্রতা শূন্য হোৱা বক্র উলিওৱা।

Find the curve whose curvature at any point on it is zero.

- (d) তলত দিয়া বক্রৰ অনন্তস্পৰ্শী নিৰ্ণয় কৰা : 4

Find the asymptotes of the following curve :

$$x^3 - 2x^2y + xy^2 + x^2 - xy + 2 = 0$$

অথবা / Or

$y = x^3 - 3x + 3$ সমীকৰণৰ গ্ৰাফ অংকন কৰা, আৰু স্থানীয় চৰম বিন্দু আৰু ইনফ্লেকচন বিন্দু চিনাক্ত কৰা।

Draw the graph of the equation $y = x^3 - 3x + 3$, and identify local extreme points and inflection points.

4. (a) $y^2 = 4ax$ বক্রৰ প্ৰাচলিক সমীকৰণ লিখা। 1
Write the parametric equation of $y^2 = 4ax$.
- (b) বক্রৰ দ্বি-বিন্দু সংজ্ঞায়িত কৰা। 1
Define double point of a curve.
- (c) তলৰ ধ্ৰুৱীয় সমীকৰণটোৰ কাৰ্টেচিয়ান সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা আৰু চিত্ৰটো চিহ্নিত কৰা : 3
Find the Cartesian equation of the following polar equation and identify the graph :
$$r^2 = 4r \cos \theta$$
- (d) তলৰ বক্ৰসমূহৰ যি কোনো এটাৰ চিত্ৰ অংকন কৰা : 5
Trace any one of the following curves :
(i) $r = 1 - \cos \theta$
(ii) $y = x^3 - 12x - 16$
5. (a) মধ্যমান উপপাদ্যটো লিখা। 1
Write the statement of mean value theorem.
- (b) $[-1, 1]$ অন্তৰালত $f(x) = \frac{1}{2-x^2}$ ফলনৰ বাবে 2
বোলৰ উপপাদ্য প্ৰতিপন্ন কৰা।
Verify Rolle's theorem for the function $f(x) = \frac{1}{2-x^2}$ in the interval $[-1, 1]$.
- (c) মধ্যমান উপপাদ্যত $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$,
 $a < c < b$, c ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা, যদি 3
 $f(x) = x^2 + 2x - 1$, $a = 0$, $b = 1$

(d) তলৰ যি কোনো দুটাৰ মান নিৰ্ণয় কৰা : $2 \times 2 = 4$

Find the value of any two of the following :

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos 2x}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{2 \tan x}$$

(Additional 20 marks for 2023 Batch)

7. (a) যদি ফলন

$$f(x) = \begin{cases} 7x - 3, & x \leq 1 \\ kx^2, & x > 1 \end{cases}$$

যি কোনো বাস্তৱ সংখ্যা x ৰ বাবে অবিৰত হয়, তেন্তে k ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

2

If the function

$$f(x) = \begin{cases} 7x - 3, & x \leq 1 \\ kx^2, & x > 1 \end{cases}$$

is continuous for all $x \in \mathbb{R}$, then find the value of k .

(b) x ৰ সাপেক্ষে $y = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$ ৰ অৱকলজ উলিওৱা।

4

Find the derivative of $y = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$ w.r.t. x .

(c) যদি $y = e^{ax} \cos bx$, তেন্তে y_n ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

4

If $y = e^{ax} \cos bx$, then find y_n .

(d) তলৰ যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ লিখা : 5×2=10

Answer any two of the following :

(i) $r = a(1 - \cos\theta)$ কাৰ্ডিয়ইডৰ যি কোনো বিন্দু (r, θ) ত বক্রতাৰ ব্যাসাৰ্থ নিৰ্ণয় কৰা।

Find the radius of curvature at any point (r, θ) of the cardioid $r = a(1 - \cos\theta)$.

(ii) যদি $y = e^{\cos^{-1}x}$, তেন্তে লিবনিটজৰ উপপাদ্য প্ৰয়োগ কৰি দেখুওৱা যে

If $y = e^{\cos^{-1}x}$, then using Leibnitz's theorem show that

$$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2 + 1)y_n = 0$$

(iii) ধৰা হ'ল $y = mx + c$ এটা বক্রৰ অসীম শাখাৰ সাপেক্ষে এটা অনন্তস্পৰ্শী ৰেখা। তেন্তে দেখুওৱা যে $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = m$, য'ত বিন্দু (x, y) বক্রটোৰ অসীম শাখাত অৱস্থিত এটা বিন্দু।

Let $y = mx + c$ be an asymptote corresponding to an infinite branch of a curve. Then show that $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = m$, where (x, y) is a point on the infinite branch of the curve.

In the mean value theorem

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c), \quad a < c < b$$

find the value of c , if

$$f(x) = x^2 + 2x - 1, \quad a = 0, \quad b = 1$$

(d) e^x ক x ৰ ঘাত হিচাপে মেক্লেৰিনৰ শ্ৰেণীত বিস্তাৰ কৰা। 3

Expand e^x in power of x by Maclaurin's series.

6. (a) টেইলৰৰ শ্ৰেণীৰ n তম পদৰ অৱশিষ্ট পদটো লাগ্ৰাঞ্জৰ আকাৰত লিখা। 1

Write the remainder after n terms of Taylor's series in Lagrange's form.

(b) $f(x)$ ফলনৰ $x = a$ বিন্দুত স্থানীয় চৰম মান থকাৰ পৰ্যাপ্ত চৰ্তটো লিখা। 1

Write the necessary condition for a function $f(x)$ to have local extreme value at $x = a$.

(c) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$ ফলনৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান নিৰ্ণয় কৰা। 4

Find the maximum and minimum values of the function

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$$

অথবা / Or

মেক্লেৰিনৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি $\sin x$ ক x ৰ সূচকত অসীম শ্ৰেণীত বিস্তৃত কৰা।

Using Maclaurin's theorem, expand $\sin x$ in an infinite series in powers of x .