

Total No. of Printed Pages—7

**1 SEM FYUGP MINMTH1**

**2025**

( November )

**MATHEMATICS**

( Minor )

Paper : MINMTH1

**( Differential Calculus )**

*Full Marks : 60 (80 for 2023 Batch)*

*Time : 2 hours (3 hours for 2023 Batch)*

*The figures in the margin indicate full marks for the questions*

1. (a)  $\epsilon$ - $\delta$  চৰ্ত অনুযায়ী সীমাৰ সংজ্ঞা লিখা। 1

Write the definition of limit using  $\epsilon$ - $\delta$  criterion.

(b) 
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যদি } x \neq 2 \\ 0 & \text{যদি } x = 2 \end{cases}$$

ফলনৰ বাবে বিচ্ছিন্নতাৰ বিন্দুবোৰ শ্ৰেণীবদ্ধ কৰা। 2

Classify the points of discontinuity of the function

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } x \neq 2 \\ 0 & \text{if } x = 2 \end{cases}$$

- (c) প্রমাণ কৰা যে যি কোনো অবিৰত ফলন এটা বন্ধ অন্তৰাল  $[a, b]$ ত সীমাবদ্ধ। 4

Prove that any continuous function defined on a closed interval  $[a, b]$  is bounded.

- (d) যদি  $y = \cos(m \sin^{-1} x)$ , প্রমাণ কৰা যে  
 $(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)xy_{n+1} + (m^2 - n^2)y = 0$  4

If  $y = \cos(m \sin^{-1} x)$ , show that  
 $(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)xy_{n+1} + (m^2 - n^2)y = 0$

2. (a) ফলন  $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ ৰ বাবে  $f_x$ ,  $f_y$  উলিওৱা। 2

Find  $f_x$ ,  $f_y$  for the function  
 $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ .

- (b) যদি  $u = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ , দেখুওৱা যে

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 3$$

If  $u = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ , show that

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(c) যদি  $u = x^y$ , তেন্তে প্রমাণ কৰা যে

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \quad 2$$

If  $u = x^y$ , then prove that

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

(d) যদি  $u = x\phi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi(x)$ , প্রমাণ কৰা যে

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = x\phi\left(\frac{y}{x}\right) \quad 4$$

If  $u = x\phi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi(x)$ , prove that

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = x\phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

3. (a)  $y = f(x)$  আৰু  $y = \phi(x)$  বক্ৰবোৰৰ ছেদৰ কোণটো লিখা। 1

Write the angle of the intersection of the curves  $y = f(x)$  and  $y = \phi(x)$ .

(b) বক্ৰ

$$x = a(2\cos t + \cos 2t)$$

$$y = a(2\sin t - \sin 2t) - b$$

বাবে 't' বিন্দুত টনা অভিলম্বৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা। 3

Find the equation of the normal at 't' on the curve

$$x = a(2 \cos t + \cos 2t)$$

$$y = a(2 \sin t - \sin 2t)$$

(c) দেখুওৱা যে  $r^m = a^m \cos m\theta$  বক্ৰৰ মেৰুৰ মাজেৰে

$$\text{যোৱা বক্ৰতাৰ জ্যা হৈছে } \frac{2r}{m+1}.$$

5

Show that the chord of curvature through the pole of the curve

$$r^m = a^m \cos m\theta \text{ is } \frac{2r}{m+1}.$$

(d)  $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 + 2xy + 2y^2 - 3x + y = 0$

বক্ৰৰ অনন্তস্পৰ্শী নিৰ্ণয় কৰা।

5

Determine the asymptotes of the curve

$$x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 + 2xy + 2y^2 - 3x + y = 0$$

(e)  $x^3 + y^3 = 3axy$  বক্ৰৰ চিত্ৰ অংকন কৰা।

5

Trace the curve  $x^3 + y^3 = 3axy$ .

4. (a) ব'লৰ উপপাদ্যটো লিখা।

2

State Rolle's theorem.

(b) যদি  $0 < u < v$ , দেখুওৱা যে

$$\frac{v-u}{1+v^2} < \tan^{-1} v - \tan^{-1} u < \frac{v-u}{1+u^2}$$

5

Show that

$$\frac{v-u}{1+v^2} < \tan^{-1} v - \tan^{-1} u < \frac{v-u}{1+u^2}$$

if  $0 < u < v$ .

- (c) টেইল'ৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি দেখুওৱা যে  $x > 0$  ৰ বাবে  $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ . 3

Using Taylor's theorem, show that

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x, \text{ for } x > 0.$$

- (d) ফলন  $\log(1+x)$ -ৰ বাবে মেকলৰিনৰ অসীম শ্ৰেণী নিৰ্ণয় কৰা। 5

Find the Maclaurin's infinite series for the function  $\log(1+x)$ .

- (e) দিয়া আছে  $xy = 4$ ,  $4x + 9y$  ৰ সৰ্বাধিক আৰু সৰ্বনিম্ন মানসমূহ নিৰ্ণয় কৰা। 4

Given  $xy = 4$ , find the maximum and minimum values of  $4x + 9y$ .

অথবা / Or

মান নিৰ্ণয় কৰা :

Evaluate :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$$

## ( Additional 20 marks for 2023 Batch )

5. (a) যদি  $y = x^{2n}$ , য'ত  $n$  এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, তেন্তে দেখুওৱা যে  $y_n = 2^n \{1.3.5...(2n-1)\}x^n$ . 3  
If  $y = x^{2n}$ , where  $n$  is a positive integer, then show that  $y_n = 2^n \{1.3.5...(2n-1)\}x^n$ .

অথবা / Or

যদি  $y = \log(x + \sqrt{1+x^2})$ , তেন্তে  $y_n(0)$  নিৰ্ণয় কৰা।

If  $y = \log(x + \sqrt{1+x^2})$ , then find  $y_n(0)$ .

- (b) যদি  $f = \sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ , তেন্তে প্রমাণ কৰা যে  $xf_x + yf_y = 0$ . 3

If  $f = \sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ , prove that

$$xf_x + yf_y = 0.$$

- (c) দেখুওৱা যে বক্ৰ  $x^2y = a(x^2 + y^2)$ ৰ বক্ৰতাৰ ব্যাসার্ধ বিন্দু  $(-2a, 2a)$ ত  $-2a$ . 5

Show that the radius of curvature of the curve  $x^2y = a(x^2 + y^2)$  at  $(-2a, 2a)$  is  $-2a$ .

- (d)  $r = a(2\cos\theta + 1)$  বক্রৰ চিত্ৰ অংকন কৰা। 5  
Trace the curve  $r = a(2\cos\theta + 1)$ .

6. প্রমাণ কৰা যে

$$\log(a+x) = \log a + \frac{x}{a} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{a^2} + \dots$$

যদি  $|x| < a$ .

4

Prove that

$$\log(a+x) = \log a + \frac{x}{a} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{a^2} + \dots$$

if  $|x| < a$ .

অথবা / Or

নিৰ্ণয় কৰা :

Find :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e + \frac{1}{2}ex - \frac{11}{24}ex^2}{x^3}$$

\*\*\*