

Done ✓

Total No. of Printed Pages—8

## 4 SEM FYUGP MTHC4B

2025

( June )

MATHEMATICS

( Core )

Paper : MTHC4B

( Riemann Integration and Series of Functions )

Full Marks : 60

Time : 2 hours

*The figures in the margin indicate full marks  
for the questions*

1. (a)  $[a, b]$ ;  $a, b \in \mathbb{R}$  ব টেগড পাৰ্টিশ্যনৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1  
Define a tagged partition of  $[a, b]$ ;  $a, b \in \mathbb{R}$ .
- (b)  $[a, b]$  ত সীমাবদ্ধ থকা এটা ফলন  $f$  ৰ এটা পাৰ্টিশ্যন  $[a, b]$  ৰ সাপেক্ষে নিম্ন আৰু উৰ্বৰ সমষ্টিৰ সংজ্ঞা দিয়া। 2  
Define the upper and lower sums of a function  $f$  bounded on  $[a, b]$  with respect to a partition of  $[a, b]$ .

- (c) যদি  $[0, 1]$  ত  $f$  এটা একমুখৰ ক্ৰমবৰ্ধমান ফলন হয় আৰু  $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1\right\}$ ,  $[0, 1]$  ৰ এটা পাৰ্টিশ্যন হয়, তেন্তে  $L(f, P)$  আৰু  $U(f, P)$  নিৰ্ণয় কৰা।

4

If  $P$  is a partition of  $[0, 1]$  given by

$$P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1\right\}$$

and  $f$  is a strictly increasing function on  $[0, 1]$ , then find  $L(f, P)$  and  $U(f, P)$ .

- (d) যদি  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $[a, b]$  ত সীমাবদ্ধ এটা ফলন  $f$  এ নিম্নোক্ত চৰ্ত

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$$

সিদ্ধ কৰে য'ত  $P$ ,  $[a, b]$  ৰ এক পাৰ্টিশ্যন, তেন্তে দেখুওৱা যে  $f$ ,  $[a, b]$  ত অনুকলনীয় হ'ব।

4

If  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists$  a bounded function  $f$  on  $[a, b]$  satisfying  $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$ , where  $P$  is a partition of  $[a, b]$ , then show that  $f$  is integrable on  $[a, b]$ .

- (e) দিয়া আছে (Given)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

$f$  অনুকলনীয় হয় নে নহয়, পৰীক্ষা কৰা।

4

investigate whether  $f$  is integrable or not.

অথবা / Or

দেখুওরা যে সকলো সীমাবদ্ধ ফলন অনুকলনীয় নহয়।

Establish that all bounded functions are not integrable.

- (f) দেখুওরা যে যদি  $[a, b]$  ত  $f$  এটা সীমাবদ্ধ ফলন যিটো ডারবিউ অনুকলনীয়, সেই ফলন  $[a, b]$  ত বীমান অনুকলনীয় হ'ব।

4

Establish that Darboux's integrability of a bounded function  $f$  on  $[a, b]$  implies Riemann integrability of that function on  $[a, b]$ .

অথবা / Or

দেখুওরা যে (Show that)

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx; \quad x \in [a, b]$$

$[a, b]$  ত অনবিচ্ছিন্ন আৰু যদি  $f, x \in [a, b]$  ত অনবিচ্ছিন্ন হয়, তেন্তে  $F$  অৱকলনীয় হ'ব আৰু তেতিয়া  $f = F'$  হ'ব।

is continuous on  $[a, b]$  and if  $f$  is continuous on  $x \in [a, b]$ , then  $F$  is differentiable and  $f = F'$ .

2. (a) তলৰ যি কোনো দুটাৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা :  $2 \times 2 = 4$

Examine the convergence of any *two* of the following :

$$(i) \int_0^{\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{2m}} dx$$

$$(ii) \int_0^{\infty} \frac{x dx}{(1+x)^3}$$

$$(iii) \int_0^{\infty} \sin x^2 dx$$

(b) দেখুওৱা যে

Show that

$$(i) \int_0^a \frac{dx}{(a^n - x^n)^{\frac{1}{n}}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}$$

$$(ii) \frac{\Gamma(n)}{c^n} = \int_0^{\infty} e^{-cy} y^{n-1} dy$$

$2+2=4$

(c) দেখুওৱা যে

Show that

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

3

3. (a) বাস্তৱ ফলনৰ অনুক্রমৰ বিন্দুমাত্ৰিক অভিসাৰিতাৰ সংজ্ঞা দিয়া।

1

Define pointwise convergence of a sequence of functions on  $\mathbb{R}$ .

- (b) দিয়া আছে (Given)

$$f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_n(k) = n(\text{mod } k); k = 1, 2, 3$$

য'ত  $n(\text{mod } k)$ ,  $k$  ক  $n$  ৰে হৰণ কৰিলে থকা বাকী।  
দেখুওৱা যে  $(f_n)$  বিন্দুমাত্ৰিক অভিসাৰী নহয়।

2

where  $n(\text{mod } k)$  is the remainder when  $n$  divides  $k$ . Show that  $(f_n)$  does not converge pointwise.

- (c) তলৰ যি কোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ দিয়া :

4×4=16

Answer any four of the following :

- (i) যদি  $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$  হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে  $(f_n)$ ,  $[0, \infty)$  ত সমমাত্ৰিকভাৱে 0 লৈ অভিসাৰী হ'ব।

If  $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$ , then show that the sequence  $(f_n)$  converges uniformly to 0 on  $[0, \infty)$ .

- (ii)  $(f_n)$  অনুক্রমৰ বাবে ক'চিৰ সমমাত্ৰিক অনুক্রমৰ চৰ্ত লিখি প্ৰমাণ কৰা, য'ত  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}; X \subseteq \mathbb{R}$ .

State and prove Cauchy's criterion of uniform convergence for the sequence  $(f_n)$ , where

$$f_n : X \rightarrow \mathbb{R}; X \subseteq \mathbb{R}$$

- (iii) ফলনৰ শ্ৰেণীৰ নিশ্চিত আৰু সমমাত্ৰিক অভিসাৰিতাৰ ৰেইবস্ট্ৰাচৰ  $M$ -টেষ্টটো উল্লেখ কৰা আৰু ইয়াৰ পৰা দেখুওৱা যে তলৰ শ্ৰেণীটো সমমাত্ৰিক অভিসাৰী :

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nt; 0 < r < 1$$

State Weierstrass  $M$ -test for absolute and uniform convergence of a series of functions and hence show that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nt; 0 < r < 1$$

converges uniformly.

- (iv) দেখুওৱা যে তলৰ শ্ৰেণীটো যি কোনো অন্তৰাল  $[a, b]$  ত সমমাত্ৰিকভাৱে অভিসাৰী :

Show that the following series is uniformly convergent on any interval  $[a, b]$  :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$$

(v) যদি  $(f_n)$  সমমাত্রিকভাবে  $f$  লৈ  $X$  ব ওপবত অভিসারী হয়, য'ত  $f_n : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  আৰু  $f_n$  বোৰ  $a \in X$  ত অনবিচ্ছিন্ন হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে  $f, a \in X$  ত অনবিচ্ছিন্ন হ'ব।

If  $(f_n)$ , where  $f_n : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  converges uniformly on  $X$  to  $f$  and  $f_n$ 's are continuous at  $a \in X$ , then show that  $f$  is continuous at  $a \in X$ .

4. (a) সূচক শ্ৰেণী  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$  ক  $f_n; n=0, 1, 2, \dots$

ফলনৰ অসীম শ্ৰেণী হিচাবে প্ৰকাশ কৰা।

1

Express the power series  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$  in the form of an infinite series of functions  $f_n; n=0, 1, 2, \dots$ .

(b) সূচক শ্ৰেণী  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$  ৰ বাবে এটা বিস্তৃত বাস্তৱ

সংখ্যা  $R$  নিৰ্ণয় কৰা যাতে  $\frac{1}{R} = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ .

3

For the power series  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$  determine an extended real number  $R$  such that  $\frac{1}{R} = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ .

- (c) যদি এটা সূচক শ্রেণী  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$  নিশ্চিত আক সমমাত্রিকভাবে  $f$  লৈ অভিসাৰী হয়, দেখুওৱা যে  $f$ ,  $(-R, R)$  ত অনবিচ্ছিন্ন হ'ব, য'ত  $R; 0 < R \leq \infty$ , এটা বিস্তৃত বাস্তৱ সংখ্যা।

3

If a power series  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$  converges absolutely and uniformly to a function  $f$ , show that there exists an extended real number  $R; 0 < R \leq \infty$  such that  $f$  is continuous on  $(-R, R)$ .

- (d) আবেল'ৰ সীমা সূত্র উল্লেখ কৰি, ইয়াৰ সহায়েৰে দেখুওৱা যে সূচক শ্রেণী  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$  সমমাত্রিকভাবে অভিসাৰী।

4

State Abel's limit theorem and use it to show that the power series

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

is uniformly convergent.

\*\*\*