

Done ✓

Total No. of Printed Pages—8

4 SEM FYUGP MTHC4C

2025

(June)

MATHEMATICS

(Core)

Paper : MTHC4C

(Ring Theory and Linear Algebra I)

Full Marks : 60

Time : 2 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions*

1. (a) বিং এটাত এককৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1
Define unity in a ring.
- (b) এটা বিঙৰ উপসংহতিৰ উদাহৰণ দিয়া যি যোগৰ সাপেক্ষে
এটা উপগোট কিন্তু উপবিং নহয়। 2
Give an example of a subset of a ring that
is a subgroup under addition but not a
subring.
- (c) এটা সসীম অখণ্ড ড'মেইন এটা ক্ষেত্র বুলি প্রমাণ কৰা। 3
Prove that a finite integral domain is a
field.

- (d) এটা বিঙৰ বৈশিষ্ট্য সংজ্ঞায়িত কৰা। ধৰা হওক R একক 1 থকা এটা আঙঠি। প্রমাণ কৰা যে যদি 1ৰ যোগৰ অধীনত অসীম ক্রম থাকে, তেন্তে R ৰ বৈশিষ্ট্য 0 আৰু যদি 1ৰ যোগৰ অধীনত n ক্রম থাকে, তেন্তে R ৰ বৈশিষ্ট্য n . 2+3=5

Define characteristic of a ring. Let R be a ring with unity 1. Prove that if 1 has infinite order under addition, then the characteristic of R is 0 and if 1 has order n under addition, then the characteristic of R is n .

নাইবা / Or

Prime Ideal আৰু Maximal Idealৰ সংজ্ঞা দিয়া। R ক একক থকা এটা কমিউটেটিভ বিং বুলি ধৰা হওক আৰু A ক R ৰ ideal. প্রমাণ কৰা যে R/A এটা integral domain যদি আৰু কেৱল যদি A মৌলিক হয়। 5

Define Prime Ideal and Maximal Ideal. Let R be a commutative ring with unity and let A be an ideal of R . Then prove that R/A is an integral domain if and only if A is prime.

2. (a) “ধৰা হওক R বৈশিষ্ট্য 2ৰ এটা বিনিময় বিং। তেতিয়া $a \rightarrow a^2$ মেপিং R ৰ পৰা R লৈ আঙঠি সমৰূপতা নহয়।” সত্য নে অসত্য লিখা। 1

“Let R be a commutative ring of characteristic 2. Then the mapping $a \rightarrow a^2$ is not a ring homomorphism from R to R .” State True or False.

- (b) ধৰা হওক R এটা একক 1 থকা এটা আঙঠি। $n \rightarrow n \cdot 1$ দ্বাৰা দিয়া মেপিং $f : Z \rightarrow R$ এটা বিঙৰ সমৰূপতা বুলি প্ৰমাণ কৰা। 3

Let R be a ring with unity 1 . Prove that the mapping $f : Z \rightarrow R$ given by $n \rightarrow n \cdot 1$ is a ring homomorphism.

- (c) $Z \oplus Z$ ৰ পৰা Z লৈ সকলোবোৰ বিঙৰ সমৰূপতা উলিওৱা। 3

Determine all ring homomorphisms from $Z \oplus Z$ to Z .

- (d) ধৰা হওক D এটা অবিচ্ছেদ্য ড'মেইন। প্ৰমাণ কৰা যে এটা ক্ষেত্ৰ F আছে য'ত D ৰ সমৰূপী এটা উপবিং থাকে। 4

Let D be an integral domain. Then prove that there exists a field F that contains a subring isomorphic to D .

নাইবা / Or

R ক একক থকা এটা বিং আৰু ϕ ক R ৰ S ৰ ওপৰত এটা বিঙৰ সমৰূপতা বুলি ধৰা হওক য'ত S ৰ এটাতকৈ অধিক মৌল আছে। S ৰ এটা একক আছে বুলি প্ৰমাণ কৰা।

Let R be a ring with unity and let ϕ be a ring homomorphism from R onto S where S has more than one element. Prove that S has a unity.

- (e) যদি R একক থকা বিং আৰু R ৰ বৈশিষ্ট্য $n > 0$ হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে R ত Z_n ৰ সমৰূপী এটা উপবিং থাকে আৰু যদি R ৰ বৈশিষ্ট্য 0 হয়, তেন্তে R ত Z ৰ সমৰূপী এটা উপবিং থাকে।

4

If R is a ring with unity and the characteristic of R is $n > 0$, then prove that R contains a subring isomorphic to Z_n and if the characteristic of R is 0 , then R contains a subring isomorphic to Z .

- (f) যদি F বৈশিষ্ট্য p ৰ এটা ক্ষেত্র হয়, তেন্তে F ত এটা Z_p ৰ সমৰূপী উপক্ষেত্র থাকে। যদি F , 0 বৈশিষ্ট্যৰ এটা ক্ষেত্র হয়, তেন্তে F ত পৰিমেয় সংখ্যাৰ সমৰূপী এটা উপক্ষেত্র থাকে।

4

If F is a field of characteristic p , then F contains a subfield isomorphic to Z_p . If F is a field of characteristic 0 , then show that F contains a subfield isomorphic to the rational numbers.

নাইবা / Or

ধৰা হওক n ৰ দশমিক উপস্থাপন $a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$. প্রমাণ কৰা যে n , 11 ৰে বিভাজ্য হ'ব যদি আৰু যদিহে $a_0 - a_1 + a_2 - \dots (-1)^k a_k$, 11 ৰে বিভাজ্য হয়।

Let n be an integer with decimal representation, $a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$. Prove that n is divisible by 11 if and only if $a_0 - a_1 + a_2 - \dots (-1)^k a_k$ is divisible by 11 .

3. (a) যদি S এটা বৈখিকভাৱে নিৰ্ভৰশীল ভেক্টৰৰ গোট, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে S ত থকা এটা ভেক্টৰ আনবোৰৰ বৈখিক সংমিশ্ৰণ।

3

If S is a linearly dependent set of vectors, prove that one of the vectors in S is a linear combination of the others.

- (b) যদি V , 5 মাত্ৰাৰ F ৰ ওপৰত ভেক্টৰ স্থান আৰু U আৰু W , 3 মাত্ৰাৰ V ৰ উপভেক্টৰ স্থান হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে $U \cap W \neq \{0\}$.

4

If V is a vector space over F of dimension 5 and U and W are subspaces of V of dimension 3, prove that $U \cap W \neq \{0\}$.

নাইবা / Or

প্রমাণ কৰা যে n মাত্ৰাৰ F ৰ ওপৰত এটা সমীম-মাত্ৰিক ভেক্টৰ স্থান V ৰ $(n+1)$ বা তাতকৈ অধিক ভেক্টৰ স্থানৰ প্রতিটো গোট বৈখিকভাৱে নিৰ্ভৰশীল।

Prove that each set of $(n+1)$ or more vectors of a finite-dimensional vector space V over F dimension n is linearly dependent.

- (c) ভেক্টৰ স্থানৰ ভিত্তি নিৰ্ধাৰণ কৰা। যদি $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ আৰু $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ দুয়োটা F ক্ষেত্ৰৰ ওপৰত ভেক্টৰ স্থান V ৰ ভিত্তি হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে $m = n$.

4

If $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ and $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ are both bases of a vector space V over a field F , then prove that $m = n$.

নাইবা / Or

যদি U এটা সসীম-মাত্রিক ভেক্টৰ স্থান V ৰ এটা সঠিক উপস্থান হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে U ৰ মাত্ৰা V ৰ মাত্ৰাতকৈ কম।

If U is a proper subspace of a finite-dimensional vector space V , show that the dimension of U is less than the dimension of V .

4. (a) F ৰ ওপৰত V আৰু W ভেক্টৰ স্থানৰ বাবে একক আৰু শূন্য ৰূপান্তৰ সংজ্ঞায়িত কৰা। 1+1=2

Define identity and zero transformations for the vector spaces V and W over F .

- (b) ভেক্টৰ স্থানৰ বৈখিক ৰূপান্তৰৰ সংজ্ঞা দিয়া। দেখুওৱাওক যে মেপিং $T : (a, b) \rightarrow (a+2, b+3) \mathbb{R}^2$ ৰ ওপৰত V ৰ বৈখিক ৰূপান্তৰ নহয়। 1+3=4

Define linear transformation of a vector space. Show that the mapping $T : (a, b) \rightarrow (a+2, b+3)$ of V over \mathbb{R}^2 into itself is not a linear transformation.

- (c) T হৈছে V ৰ পৰা W লৈ এটা বৈখিক ৰূপান্তৰ। প্রমাণ কৰা যে T ৰ সাপেক্ষে V ৰ ছবিখন W ৰ এটা উপস্থান। 4

Let T be a linear transformation from V to W . Prove that the image of V under T is a subspace of W .

নাইবা / Or

ধৰা হওক T এটা ভেক্টৰ স্থান V ৰ বৈখিক কপান্তৰ।
 প্রমাণ কৰা যে $\{v \in V \mid T(v) = 0\}$, T ৰ কৰ্নেল, V ৰ
 এটা উপস্থান।

Let T be a linear transformation of a
 vector space V . Prove that
 $\{v \in V \mid T(v) = 0\}$, the Kernel of T , is a
 subspace of V .

(d) ধৰা হওক V আৰু W ভেক্টৰ স্থান, আৰু $T:V \rightarrow W$
 বৈখিক। যদি V সসীম-মাত্ৰিক হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা
 যে,

$$\text{nullity}(T) + \text{rank}(T) = \dim(V)$$

4

Let V and W be vector spaces, and let
 $T:V \rightarrow W$ be linear. If V is finite-
 dimensional then prove that

$$\text{nullity}(T) + \text{rank}(T) = \dim(V)$$

নাইবা / Or

ধৰা হওক V আৰু W ভেক্টৰ স্থান আৰু $T:V \rightarrow W$
 বৈখিক। প্রমাণ কৰা যে T এক-এক যদি আৰু যদিহে
 T এ V ৰ বৈখিকভাৱে স্বাধীন উপগোটসমূহ W ৰ
 বৈখিকভাৱে স্বাধীন উপগোটসমূহৰ ওপৰত থাকে।

Let V and W be vector spaces and
 $T:V \rightarrow W$ be linear. Prove that T is
 one-one if and only if T carries linearly
 independent subsets of V onto linearly
 independent subsets of W .

(e) ধৰা হওক β আৰু γ ক্ৰমে \mathbb{R}^2 আৰু \mathbb{R}^3 ৰ বাবে
 প্ৰামাণিক ক্ৰমবদ্ধ ভিত্তি। তেন্তে $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ যাতে

$$T(a_1, a_2) = (2a_1 - a_2, 3a_1 + 4a_2, a_1)$$

দ্বাৰা সংজ্ঞায়িত বৈখিক কপান্তৰ $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ৰ বাবে
 মেট্ৰিক্স উপস্থাপন কৰা।

5

Let β and γ be the standard ordered
 bases for \mathbb{R}^2 and \mathbb{R}^3 respectively, then
 for the linear transformation $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 defined by

$$T(a_1, a_2) = (2a_1 - a_2, 3a_1 + 4a_2, a_1)$$

compute the matrix representation.

নাইবা / Or

ধৰা হওক V আৰু W এটা F ক্ষেত্ৰৰ ওপৰত ভেক্টৰ
 স্থান, আৰু $T, U: V \rightarrow W$ বৈখিক। প্ৰমাণ কৰা যে

Let V and W be vector spaces over a field
 F , and let $T, U: V \rightarrow W$ be linear. Prove
 that

(i) সকলো $a \in F$, $aT + U$ ৰ বাবে বৈখিক;

for all $a \in F$, $aT + U$ is linear;

(ii) V ৰ পৰা W লৈ সকলো বৈখিক কপান্তৰৰ সংগ্ৰহ
 F ৰ ওপৰত এটা ভেক্টৰ স্থান।

the collection of all linear
 transformations from V to W is a
 vector space over F .
