Total No. of Printed Pages—9

5 SEM TDC MTH G 1

2 0 1 3

(November)

MATHEMATICS

(General)

Course : 501

(A) Analysis—II, (B) Mechanics

Full Marks : 80

Pass Marks : 32

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

(A) Analysis—II (Complex Analysis)

(*Marks* : 35)

1. *(a)* বৈশ্লেষিক ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define an analytic function.

(b) দেখুওৱা যে $U = y^3 - 3x^2y$ ফলনটো হৰাত্মক। 3

Show that the function $U = y^3 - 3x^2y$ is harmonic.

(c) ক'চি-ৰীমান সমীকৰণবোৰ লিখি আৱশ্যকীয় চৰ্ত প্ৰমাণ কৰা। 6

State , and prove the necessary conditions of Cauchy-Riemann equations.

বা / Or

বৈশ্লেষিক ফলনটো নিৰ্ণয় কৰা, যেতিয়া $U = x^3 - 3xy^2$.

Construct the analytic function, when $U = x^3 - 3xy^2$.

2. (a) সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা, ৰেখা অনুকলন আৰু বন্ধ পৰিৰেখা। 1+1

Define line integral and closed contour.

(b) যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ দিয়া : 5×2=10

Answer any *two* :

(i) ক'চিৰ অনুকল সূত্ৰটো উল্লেখ কৰি প্ৰমাণ কৰা।

State and prove Cauchy's integral formula.

(ii) যদি $f(z)$, z ৰ এটা বৈশ্লেষিক ফলন আৰু $f'(z)$ এটা বন্ধ পৰিৰেখা C ত আৰু তাৰ ভিতৰৰ প্ৰতিটো বিন্দুত অনৱচ্ছিন্ন, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $\int_C f(z)\, dz = 0$.

If $f(z)$ is an analytic function of z and $f'(z)$ is continuous at each point within and on a closed contour C, then prove that $\int_C f(z)\, dz = 0$.

(iii) যদি D ক্ষেত্ৰত $f(z)$ এটা বৈশ্লেষিক ফলন আৰু ইয়াৰ অৱকলজ যি কোনো এটা বিন্দু $z = a$ ত পুনৰ D ক্ষেত্ৰত বৈশ্লেষিক হ'লে, দেখুওৱা যে

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\, dz}{(z-a)^2}$$

Show that $f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\, dz}{(z-a)^2}$, if $f(z)$ is analytic in the domain D and its derivative at any point $z = a$ is again analytic.

3. (a) চমুকৈ লিখা (যি কোনো দুটা) : 1+1=2

অকলশৰীয়া অসামান্যতা (Isolated singularity), মেৰু (Pole), স্থানান্তৰিত অসামান্যতা (Removable singularity), আৱশ্যকীয় অসামান্যতা (Essential singularity)

Write in short (any *two*) :

Isolated singularity, Poles, Removable singularity, Essential singularity

(b) টেইলৰৰ উপপাদ্যটো লিখা। $f(z) = \sin z$ ক $z = \frac{\pi}{4}$ বিন্দুত টেইলৰৰ সূত্ৰৰ সহায়ত বিস্তাৰ কৰা। 2+3=5

State Taylor's theorem. Expand $f(z) = \sin z$ in a Taylor series about $z = \frac{\pi}{4}$.

বা / *Or*

লৰেন্টৰ উপপাদ্যটো লিখা। ইয়াৰ সহায়ত $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ ক $1 < |z| < 3$, বিস্তাৰ কৰা। 5

State Laurent's theorem and expand $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$, $1 < |z| < 3$ with the help of this theorem.

(c) $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z}{(z+1)(z^2+4)}$ ফলনৰ অৱশিষ্ট (residue) মান নিৰ্ণয় কৰা। 6

Find the residue of $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z}{(z+1)(z^2+4)}$.

বা / *Or*

মান নিৰ্ণয় কৰা :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\sin\theta}, \text{ যদি } a > |b|$$

Find the value of :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\sin\theta}, \text{ if } a > |b|$$

(B) Mechanics

(*Marks* : 45)

(a) Statics

4. (a) 'স্ক্ৰু' (Screw) বুলিলে কি বুজা? 1

What do you mean by screw?

(b) এটা দৃঢ় বস্তুত ক্ৰিয়া কৰা সীমিত সংখ্যক বলৰ কেন্দ্ৰাক্ষৰ সমীকৰণটো লিখা। 2

Write down the equation of central axis for a finite number of forces acting on a rigid body.

(c) যি কোনো এটাৰ উত্তৰ দিয়া : 7

Answer any *one* :

(i) প্ৰমাণ কৰা যে তিনিটা বলে এটা দৃঢ় বস্তুৰ ওপৰত ক্ৰিয়া কৰি সাম্য অৱস্থাত ৰাখিলে সিহঁত সমান্তৰাল নতুবা একবিন্দুগামী হ'ব।

Prove that when a rigid body under the action of the three forces is in equilibrium, the forces are either parallel or concurrent.

(ii) কোনো ৰেঞ্চৰ মুখ্য পিট্‌চ উলিওৱা।

Find the principal pitch of any wrench.

5. যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ দিয়া : 5×2=10

Answer any *two* :

(a) আভাসী কৰ্মৰ সমীকৰণ গঠনত উপেক্ষা কৰিব পৰা বলসমূহ ব্যাখ্যা কৰা।

Explain the forces which can be omitted while forming the equation of virtual work.

(b) কাৰ্টীয় (Cartesian) আকাৰৰ সাধাৰণ ৰজ্জুকাৰ সমীকৰণ প্ৰতিষ্ঠা কৰা।

Deduce the Cartesian equation of common catenary.

(c) l দৈৰ্ঘ্যত সূতা এৰি দি চিলা এখন h উচ্চতাত এনেদৰে উৰুৱা হৈছে যে, ৰজ্জুকাৰ শীৰ্ষবিন্দুই মাটিত চুই আছে। দেখুওৱা যে চিলাখনৰ সূতাডালে ভূমিৰ লগত $2\tan^{-1}\frac{h}{l}$ পৰিমাণৰ কোণ কৰি আছে; চিলাত আৰু শীৰ্ষ বিন্দুত ৰচিৰ টান যথাক্ৰমে $w\frac{l^2+h^2}{2h}$ আৰু $w\frac{l^2-h^2}{2h}$ য'ত w, সূতাডালৰ একক দৈৰ্ঘ্যৰ ওজন।

A kite flying at a height h with a length l of wire paid out, and with the vertex of the catenary on the ground, show that at the kite the inclination of the wire to the ground is $2\tan^{-1}\frac{h}{l}$, and its tensions

there and at the ground are $w\frac{l^2+h^2}{2h}$ and $w\frac{l^2-h^2}{2h}$, where w is the weight of the wire per unit length.

(b) Dynamics

6. *(a)* সৰল দোলগতিৰ সংজ্ঞা দিয়া আৰু এই গতিৰ প্ৰকৃতি উল্লেখ কৰা। 1+1=2

Define simple harmonic motion and mention its nature.

(b) যি কোনো এটাৰ উত্তৰ দিয়া : 6

Answer any *one* :

(i) সৰল দোলগতিত থকা কোনো এটা কণাৰ পথৰ মধ্যবিন্দুৰ পৰা তিনিটা ক্ৰমাগত সময়ত হোৱা দূৰত্বৰ জোখ ক্ৰমে l, m, n. দেখুওৱা যে সম্পূৰ্ণ দোলনকালৰ সময়

$$\frac{2\pi}{\cos^{-1}\frac{l+n}{2m}}$$

The distances of a particle performing SHM from the middle point of its path at three consecutive times observed to be l, m, n. Show that the time of the complete oscillation is

$$\frac{2\pi}{\cos^{-1}\frac{l+n}{2m}}$$

(Turn Over)

(ii) এটা কণাই এডাল বক্ৰইদি গতি কৰিছে, ইয়াৰ পথৰ স্পৰ্শক আৰু অভিলম্বৰ দিশত ত্বৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

A particle is moving along a curve. Find the acceleration along the tangent and normal to the path of the particle.

7. *(a)* $\frac{d^2u}{d\theta^2}+U=\frac{P}{h^2u^2}$ আকাৰৰ কেন্দ্ৰীয় কক্ষপথৰ অৱকলীয় সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা। 7

Find the differential equation of a central orbit in the form

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+U=\frac{P}{h^2u^2}$$

বা / *Or*

(b) $\mu/(\text{দূৰত্ব})^2$ কেন্দ্ৰীয় ত্বৰণেৰে এটা কণিকা V বেগেৰে R দূৰত্বত নিক্ষেপ কৰা হৈছে। দেখুওৱা যে ইয়াৰ পথ এটা আয়তীয় পৰাবৃত্ত হ'ব যদি নিক্ষেপক কোণৰ মান

$$\sin^{-1}\left[\frac{\mu}{VR\{V^2-(2\mu/R)\}^{1/2}}\right]$$

A particle under a central acceleration $\mu/(\text{distance})^2$ is projected with velocity V at a distance R, show that the path is a rectangular hyperbola if the angle of projection is

$$\sin^{-1}\left[\frac{\mu}{VR\{V^2-(2\mu/R)\}^{1/2}}\right]$$

L

5×2=10

8. যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ দিয়া :

Answer any *two* :

(a) দেখুওৱা যে a আৰু b বাহু, আৰু M ভৰৰ এটা আয়তক্ষেত্ৰৰ কৰ্ণ সাপেক্ষে অনুভূমিক জড়তাৰ ঘূৰ্ণক

$$\frac{M}{6}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

Show that the moment of inertia of a rectangle whose sides are a and b, and mass M about a diagonal is

$$\frac{M}{6}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

(b) M ভৰৰ আৰু $2a$ দৈৰ্ঘ্যৰ এডাল পাতল সুষম দণ্ডৰ প্ৰান্তৰ জড়তা ঘূৰ্ণক নিৰ্ণয় কৰা।

Determine the moment of inertia of a thin uniform rod of mass M and length $2a$ about one end.

(c) এডাল পাতল সুষম দণ্ডৰ দৈৰ্ঘ্যৰ লম্বভাৱে থকা আৰু মধ্যবিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখা সাপেক্ষে দণ্ডডালৰ জড়তা ঘূৰ্ণক নিৰ্ণয় কৰা।

Find the moment of inertia of a thin uniform rod about a line through its centre and perpendicular to its length.

★★★