3 SEM TDC MTH G 1

2 0 1 9

(November)

MATHEMATICS

(General)

Course : 301

[Group—A : Coordinate Geometry and Group—B : Analysis—I (Real Analysis)]

Full Marks : 80
Pass Marks : 32/24

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

GROUP—A

(Coordinate Geometry)

SECTION—I

(2-Dimension)

1. (a) যদি মূলবিন্দুটো (α, β) বিন্দুলৈ ৰূপান্তৰ কৰা হয়, তেন্তে $ax + by + c = 0$ ৰেখাডালৰ ৰূপান্তৰ সমীকৰণটো লিখা। 1

If the origin is transferred to the point (α, β), then write the transformed equation of the line $ax+by+c=0$.

(b) $x\cos\theta + y\sin\theta = p$ সমীকৰণক $(p\cos\theta, p\sin\theta)$ বিন্দুত সমান্তৰাল স্থানাংক অক্ষৰেখাত পৰিৱৰ্তন কৰি ৰূপান্তৰ কৰা। 1

Transform the equation $x\cos\theta + y\sin\theta = p$ by changing to parallel axes of coordinates through the point $(p\cos\theta, p\sin\theta)$.

(c) অক্ষৰেখা ঘূৰ্ণনৰ ক্ষেত্ৰত যদি $ax+by$ ৰাশি $a'x'+b'y'$ ৰাশিলৈ ৰূপান্তৰ কৰা হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$a^2+b^2=a'^2+b'^2$$ 3

If $ax+by$ is transformed to $a'x'+b'y'$ under rotation of axes, then show that

$$a^2+b^2=a'^2+b'^2$$

2. (a) শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিওৱা : 1

দুডাল সৰলৰেখা কাল্পনিক হ'ব পাৰে, যদি

(i) $h^2-ab>0$

(ii) $h^2-ab<0$

(iii) $h^2-ab=0$

য'ত $ax^2+2hxy+by^2=0$ এ দুডাল পৃথক সৰলৰেখা নিৰ্দেশ কৰে।

Choose the correct answer :

The two straight lines may be imaginary if

(i) $h^2 - ab > 0$

(ii) $h^2 - ab < 0$

(iii) $h^2 - ab = 0$

where $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ represents two distinct straight lines.

(b) $x^2 + 2hxy - y^2 = 0$ এ নিৰ্দেশ কৰা ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণটো নিৰ্ণয় কৰা। 2

Find the angle between the pair of lines represented by $x^2 + 2hxy - y^2 = 0$.

(c) k ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা, য'ত

$$3x^2 + kxy - 3y^2 + 29x - 3y + 18 = 0$$

সমীকৰণে এযোৰ সৰলৰেখা প্ৰকাশ কৰে। 3

Determine the value of k, such that the equation

$$3x^2 + kxy - 3y^2 + 29x - 3y + 18 = 0$$

represents a pair of straight lines.

অথবা / Or

প্ৰমাণ কৰা যে (α, β) বিন্দুৰ পৰা $ax^2+2hxy+by^2=0$ সমীকৰণে নিৰ্দেশ কৰা ৰেখা দুডাললৈ টনা লম্ব দুডালৰ পূৰণফল হ'ব

$$\frac{a\alpha^2+2h\alpha\beta+b\beta^2}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}$$ 3

Prove that the product of perpendiculars from the point (α, β) drawn on the lines represented by the equation $ax^2+2hxy+by^2=0$ is

$$\frac{a\alpha^2+2h\alpha\beta+b\beta^2}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}$$

(d) যদি

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

সমীকৰণে এযোৰ সমান্তৰাল সৰলৰেখা প্ৰকাশ কৰে, তেন্তে—

(i) ৰেখাযোৰ সমান্তৰাল হোৱা চৰ্তটো লিখা;

(ii) সমান্তৰাল ৰেখাযোৰৰ মাজৰ দূৰত্ব লিখা। 1+1=2

If the equation

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

represents a pair of parallel straight lines, then—

(i) write the condition of parallelism of the pair of straight lines;

(ii) write the distance between the pair of parallel lines.

(e) প্ৰমাণ কৰা যে

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

সমীকৰণে প্ৰকাশ কৰা সৰলৰেখা দুডাল মূলবিন্দুৰ পৰা সমদূৰত্বত অৱস্থিত, যদি.

$$f^4 - g^4 = c(bf^2 - ag^2)$$ 4

Prove that the straight lines represented by the equation

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

will be equidistant from the origin, if

$$f^4 - g^4 = c(bf^2 - ag^2)$$

3. (a) $14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 58y + 71 = 0$

সমীকৰণক আদৰ্শগত আকাৰলৈ ৰূপান্তৰ কৰা। 2

Reduce the equation

$$14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 58y + 71 = 0$$

into standard form.

(b) $lx + my + n = 0$ সৰলৰেখাডাল

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

শংকুচ্ছেদৰ এডাল স্পৰ্শক হোৱা চৰ্ত নিৰ্ণয় কৰা। 4

Find the condition that the line $lx + my + n = 0$ is a tangent to the conic $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$.

অথবা / Or

দেখুওৱা যে $x\cos\phi + y\sin\phi = p$ ৰেখাডাল $ax^2 + by^2 = 1$ শংকুচ্ছেদৰ এডাল স্পৰ্শক হ'ব, যদি

$$\frac{\cos^2\phi}{a} + \frac{\sin^2\phi}{b} = p^2$$ 4

Show that the line $x\cos\phi + y\sin\phi = p$ will be a tangent to the conic $ax^2 + by^2 = 1$, if

$$\frac{\cos^2\phi}{a} + \frac{\sin^2\phi}{b} = p^2$$

(c) স্পৰ্শ জ্যা, ব্যাস আৰু অনুবন্ধী ব্যাসৰ সংজ্ঞা দিয়া। 4

Define chord of contact, diameter and conjugate diameter.

অথবা / Or

এটা শংকুৰ সাপেক্ষে এডাল ৰেখাৰ মেৰু নিৰ্ণয় কৰা। 4

Find the pole of a given line with respect to a conic.

SECTION—II

(3-Dimension)

4. (a) $ax+by+cz+d=0$ সমতললৈ টনা যি কোনো অভিলম্বৰ দিশাংককেইটা লিখা। 1

Write the direction cosines of any normal to the plane $ax+by+cz+d=0$.

(b) অক্ষত a, b আৰু c ছেদাংশ কৰা সমতলৰ সমীকৰণ লিখা। 1

Write the equation of the plane which cuts off intercepts a, b and c from the axes.

(c) $(2, -1, 5)$ বিন্দুৰ পৰা $3x-2y+6z+8=0$ সমতলখনৰ লম্বীয় দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা। 2

Find the perpendicular distance of the point $(2, -1, 5)$ from the plane $3x-2y+6z+8=0$.

(d) দেখুওৱা যে $2x-y+3z+5=0$ আৰু $4x+2y-2z+3=0$ সমতলদুখন লম্ব। 2

Show that the two planes $2x-y+3z+5=0$ and $4x+2y-2z+3=0$ are perpendicular.

(e) (0, 2, 4), (3, 1, 1) আৰু (2, 0, −1) বিন্দুৰ মাজেদি যোৱা সমতলখনৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা। 4

Find the equation of the plane passing through (0, 2, 4), (3, 1, 1) and (2, 0, −1).

অথবা / *Or*

(2, 1, 4) বিন্দুৰ মাজেদি যোৱা আৰু $9x-7y+6z+48=0$ আৰু $x+y-z=0$ সমতল দুখনৰ লম্ব হোৱা সমতলখনৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা। 4

Find the equation of the plane which passes through the point (2, 1, 4) and perpendicular to the planes $9x-7y+6z+48=0$ and $x+y-z=0$.

5. (a) প্ৰমাণ কৰা যে

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+8}{-7}=\frac{z-4}{5} \text{ আৰু } \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-6}{-3}$$

ৰেখা দুডালৰ মাজৰ ন্যূনতম দূৰত্ব $4\sqrt{3}$. 4

Prove that the shortest distance between the lines

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+8}{-7}=\frac{z-4}{5} \text{ and } \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-6}{-3}$$

is $4\sqrt{3}$.

অথবা / Or

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \text{ আৰু } \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

ৰেখাদুডালৰ মাজৰ নিম্নতম দূৰত্বৰ ৰেখাডালৰ সমীকৰণ উলিওৱা। 4

Find the equation of the line of shortest distance between the lines

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \text{ and } \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

(b) প্ৰমাণ কৰা যে

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y+4}{3}=\frac{z+1}{2} \text{ আৰু } \frac{x-4}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-2}$$

ৰেখাদুডাল $10x-14y+z=25$ সমতলখনত অৱস্থিত। 4

Prove that the lines

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y+4}{3}=\frac{z+1}{2} \text{ and } \frac{x-4}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-2}$$

lie in the plane $10x-14y+z=25$.

(Turn Over)

GROUP—B

(Analysis—I)

6. (a) যদি $y = e^{\sin x}$ হয়, তেন্তে y_2 নির্ণয় কৰা। 1

If $y = e^{\sin x}$, then find y_2.

(b) যদি $f(x) = x^3$ হয়, তেন্তে যি কোনো বিন্দু (x, y)ত বক্রৰ উপস্পৰ্শকৰ দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় কৰা। 1

If $f(x) = x^3$, then find the length of subtangent of the curve at any point (x, y).

(c) যি কোনো বিন্দু (x, y)ত $y = \log \sin x$ৰ বক্ৰতা ব্যাসাৰ্ধ নিৰ্ণয় কৰা। 2

Find the radius of curvature of $y = \log \sin x$ at any point (x, y).

(d) যদি $y = x^2 e^{ax}$ হয়, তেন্তে y_n নিৰ্ণয় কৰা। 2

If $y = x^2 e^{ax}$, then find y_n.

অথবা / *Or*

যদি $y = \dfrac{1}{x^2 + a^2}$ হয়, তেন্তে y_n নিৰ্ণয় কৰা। 2

If $y = \dfrac{1}{x^2 + a^2}$, then find y_n.

(e) যদি $\log y = \tan^{-1} x$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$(1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0$$ 4

If $\log y = \tan^{-1} x$, then prove that

$$(1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0$$

অথবা / Or

মান নিৰ্ণয় কৰা (যি কোনো এটা) : 4

(i) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

(ii) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{x \cos x - \log(1+x)}{x^2}$

Evaluate (any *one*) :

(i) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

(ii) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{x \cos x - \log(1+x)}{x^2}$

7. (a) ডাৰ্বৰ'ক্স-ৰ উপপাদ্যটো লিখা। 2

State Darboux's theorem.

(b) মধ্যমান উপপাদ্যত

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c), \; a < c < b;$$

cৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যদি $f(x) = x^2$, যেতিয়া $a = 1$, $b = 2$. 4

In the mean value theorem

$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c),\ a<c<b;$

find c if $f(x)=x^2$, when $a=1$, $b=2$.

অথবা / *Or*

e^xক মেক্‌লৰিনৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত বিস্তাৰ কৰা, য'ত শেষৰ পদটো হ'ব লাগ্রাঞ্জ আকাৰৰ। 4

Expand e^x by Maclaurin's theorem with Lagrange form of remainder.

(c) প্ৰমাণ কৰা যে যদি এটা ফলন f অন্তৰ $[a, b]$ত অবিচ্ছিন্ন হয় আৰু $f(a)\neq f(b)$, তেন্তে f ফলনে $f(a)$ আৰু $f(b)$ৰ মাজৰ সকলো মান লাভ কৰে। 3

Prove that, if a function f is continuous on $[a, b]$ and $f(a)\neq f(b)$, then it assumes every value between $f(a)$ and $f(b)$.

অথবা / *Or*

ক'চিৰ মধ্যমান উপপাদ্য উল্লেখ কৰি প্ৰমাণ কৰা। 3

State and prove Cauchy's mean value theorem.

8. *(a)* দুটা চলকৰ সমমাত্ৰাৰ ফলনৰ বাবে অয়লাৰৰ উপপাদ্যৰ সূত্ৰ লিখি প্ৰমাণ কৰা। 4

State and prove Euler's theorem on homogeneous function of two variables.

অথবা / Or

যদি $u = \sin^{-1} \dfrac{x^2 + y^2}{x+y}$, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \tan u$$ 4

If $u = \sin^{-1} \dfrac{x^2 + y^2}{x+y}$, then show that

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \tan u$$

(b) দেখুওৱা যে $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, যদি $u = \log(x^2 + y^2)$. 2

Show that $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, if $u = \log(x^2 + y^2)$.

9. (a) দেখুওৱা যে

$$\int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$ 2

Show that

$$\int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

(b) যদি $f(x)$ এটা xৰ যুগ্ম ফলন হয়, তেন্তে $\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = ?$ 1

If $f(x)$ is an even function of x, then $\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = ?$

(c) প্ৰমাণ কৰা যে

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \tan x\, dx = 0$$ 3

Prove that

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \tan x\, dx = 0$$

অথবা / *Or*

প্ৰমাণ কৰা যে

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx = \frac{\pi}{4}$$ 3

Prove that

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx = \frac{\pi}{4}$$

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$ৰ লঘুকৰণৰ সূত্ৰ নিৰ্ণয় কৰা। 4

Obtain reduction formula for

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$$

অথবা / *Or*

$y = \log\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$ বক্ৰৰ 1ৰ পৰা 2লৈ দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় কৰা। 4

Find the length of the curve $y = \log\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$ from 1 to 2.

★★★