

Total No. of Printed Pages—15

3 SEM TDC MTH G 1

2 0 1 9

(November)

MATHEMATICS

(General)

Course : 301

**[Group—A : Coordinate Geometry and
Group—B : Analysis—I (Real Analysis)]**

Full Marks : 80

Pass Marks : 32/24

Time : 3 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions*

GROUP—A

(Coordinate Geometry)

SECTION—I

(2-Dimension)

1. (a) যদি মূলবিন্দুটো (α, β) বিন্দুলৈ ৰূপান্তৰ কৰা হয়, তেন্তে
 $ax + by + c = 0$ ৰেখাডালৰ ৰূপান্তৰ সমীকৰণটো
লিখা।

1

If the origin is transferred to the point (α, β) , then write the transformed equation of the line $ax + by + c = 0$.

- (b) $x\cos\theta + y\sin\theta = p$ সমীকরণক $(p\cos\theta, p\sin\theta)$ বিন্দুত সমান্তরাল স্থানাংক অক্ষবেধাত পৰিৱৰ্তন কৰি ৰূপান্তৰ কৰা। 1

Transform the equation $x\cos\theta + y\sin\theta = p$ by changing to parallel axes of coordinates through the point $(p\cos\theta, p\sin\theta)$.

- (c) অক্ষবেধা ঘূৰ্ণনৰ ক্ষেত্ৰত যদি $ax + by$ বাশি $a'x' + b'y'$ বাশিলৈ ৰূপান্তৰ কৰা হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$$

3

If $ax + by$ is transformed to $a'x' + b'y'$ under rotation of axes, then show that

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$$

2. (a) শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিওৱা :

1

দুডাল সৰলৰেখা কাল্পনিক হ'ব পাৰে, যদি

(i) $h^2 - ab > 0$

(ii) $h^2 - ab < 0$

(iii) $h^2 - ab = 0$

য'ত $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ এ দুডাল পৃথক সৰলৰেখা নিৰ্দেশ কৰে।

(3)

Choose the correct answer :

The two straight lines may be imaginary if

(i) $h^2 - ab > 0$

(ii) $h^2 - ab < 0$

(iii) $h^2 - ab = 0$

where $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ represents two distinct straight lines.

- (b) $x^2 + 2hxy - y^2 = 0$ এ নির্দেশ কৰা ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণটো নিৰ্ণয় কৰা।

2

Find the angle between the pair of lines represented by $x^2 + 2hxy - y^2 = 0$.

- (c) k ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা, য'ত

$$3x^2 + kxy - 3y^2 + 29x - 3y + 18 = 0$$

সমীকৰণে এযোৰ সবলৰেখা প্রকাশ কৰে।

3

Determine the value of k , such that the equation

$$3x^2 + kxy - 3y^2 + 29x - 3y + 18 = 0$$

represents a pair of straight lines.

(4)

অথবা /Or

প্রমাণ কৰা যে (α, β) বিন্দুৰ পৰা
 $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সমীকৰণে নিৰ্দেশ কৰা ৰেখা
দুডাললৈ টনা লম্ব দুডালৰ পূৰণফল হ'ব

$$\frac{a\alpha^2 + 2h\alpha\beta + b\beta^2}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$$

3

Prove that the product of perpendiculars
from the point (α, β) drawn on the
lines represented by the equation
 $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ is

$$\frac{a\alpha^2 + 2h\alpha\beta + b\beta^2}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$$

(d) যদি

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

সমীকৰণে এযোৰ সমান্তৰাল সবলৰেখা প্রকাশ কৰে,
তেন্তে—

(i) ৰেখাযোৰ সমান্তৰাল হোৱা চৰ্তটো লিখা;

(ii) সমান্তৰাল ৰেখাযোৰৰ মাজৰ দূৰত্ব লিখা। $1+1=2$

If the equation

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

represents a pair of parallel straight lines, then—

- (i) write the condition of parallelism of the pair of straight lines;
- (ii) write the distance between the pair of parallel lines.

(e) প্রমাণ কৰা যে

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

সমীকৰণে প্ৰকাশ কৰা সৰলৰেখা দুডাল মূলবিন্দুৰ পৰা সমদূৰত্বত অৱস্থিত, যদি

$$f^4 - g^4 = c(bf^2 - ag^2)$$

4

Prove that the straight lines represented by the equation

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

will be equidistant from the origin, if

$$f^4 - g^4 = c(bf^2 - ag^2)$$

3. (a) $14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 58y + 71 = 0$

সমীকরণক আদর্শগত আকারে কমান্ব কবা।

2

Reduce the equation

$$14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 58y + 71 = 0$$

into standard form.

(b) $lx + my + n = 0$ সবলবেখাডাল

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

শংকুচ্ছেদৰ এডাল স্পর্শক হোৱা চৰ্ত্ত নিৰ্ণয় কবা।

4

Find the condition that the line $lx + my + n = 0$ is a tangent to the conic $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$.

অথবা / Or

দেখুওৱা যে $x \cos \phi + y \sin \phi = p$ বেখাডাল $ax^2 + by^2 = 1$ শংকুচ্ছেদৰ এডাল স্পর্শক হ'ব, যদি

$$\frac{\cos^2 \phi}{a} + \frac{\sin^2 \phi}{b} = p^2$$

4

Show that the line $x \cos \phi + y \sin \phi = p$ will be a tangent to the conic $ax^2 + by^2 = 1$, if

$$\frac{\cos^2 \phi}{a} + \frac{\sin^2 \phi}{b} = p^2$$

(7)

(c) স্পর্শ জ্যা, ব্যাস আৰু অনুবন্ধী ব্যাসৰ সংজ্ঞা দিয়া। 4

Define chord of contact, diameter and conjugate diameter.

অথবা /Or

এটা শংকুৰ সাপেক্ষে এডাল বেখাৰ মেক নিৰ্ণয় কৰা। 4

Find the pole of a given line with respect to a conic.

SECTION—II

(3-Dimension)

4. (a) $ax + by + cz + d = 0$ সমতললৈ টনা যি কোনো অভিলম্বৰ দিশাংককেইটা লিখা। 1

Write the direction cosines of any normal to the plane $ax + by + cz + d = 0$.

(b) অক্ষত a , b আৰু c ছেদাংশ কৰা সমতলৰ সমীকৰণ লিখা। 1

Write the equation of the plane which cuts off intercepts a , b and c from the axes.

(c) $(2, -1, 5)$ বিন্দুৰ পৰা $3x - 2y + 6z + 8 = 0$ সমতলখনৰ লম্বীয় দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা। 2

Find the perpendicular distance of the point $(2, -1, 5)$ from the plane $3x - 2y + 6z + 8 = 0$.

- (d) দেখুওৱা যে $2x - y + 3z + 5 = 0$ আৰু $4x + 2y - 2z + 3 = 0$ সমতলদুখন লম্ব। 2

Show that the two planes $2x - y + 3z + 5 = 0$ and $4x + 2y - 2z + 3 = 0$ are perpendicular.

- (e) $(0, 2, 4)$, $(3, 1, 1)$ আৰু $(2, 0, -1)$ বিন্দুৰ মাজেদি যোৱা সমতলখনৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা। 4

Find the equation of the plane passing through $(0, 2, 4)$, $(3, 1, 1)$ and $(2, 0, -1)$.

অথবা / Or

- $(2, 1, 4)$ বিন্দুৰ মাজেদি যোৱা আৰু $9x - 7y + 6z + 48 = 0$ আৰু $x + y - z = 0$ সমতল দুখনৰ লম্ব হোৱা সমতলখনৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা। 4

Find the equation of the plane which passes through the point $(2, 1, 4)$ and perpendicular to the planes $9x - 7y + 6z + 48 = 0$ and $x + y - z = 0$.

5. (a) প্রমাণ কৰা যে

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+8}{-7} = \frac{z-4}{5} \text{ আৰু } \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{-3}$$

- ৰেখা দুডালৰ মাজৰ ন্যূনতম দূৰত্ব $4\sqrt{3}$ । 4

Prove that the shortest distance between the lines

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+8}{-7} = \frac{z-4}{5} \text{ and } \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{-3}$$

is $4\sqrt{3}$.

অথবা / Or

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \text{ আৰু}$$

$$\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

বেখাদুডালৰ মাজৰ নিম্নতম দূৰত্বৰ বেখাদুডালৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

4

Find the equation of the line of shortest distance between the lines

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \text{ and } \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

(b) প্রমাণ কৰা যে

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y+4}{3} = \frac{z+1}{2} \text{ আৰু } \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$$

বেখাদুডাল $10x-14y+z=25$ সমতলখনত অৱস্থিত।

4

Prove that the lines

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y+4}{3} = \frac{z+1}{2} \text{ and } \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$$

lie in the plane $10x-14y+z=25$.

GROUP—B

(Analysis—I)

6. (a) যদি $y = e^{\sin x}$ হয়, তেত্তে y_2 নির্ণয় কৰা। 1

If $y = e^{\sin x}$, then find y_2 .

(b) যদি $f(x) = x^3$ হয়, তেত্তে যি কোনো বিন্দু (x, y) ত বক্রৰ উপস্পর্শকৰ দৈৰ্ঘ্য নির্ণয় কৰা। 1

If $f(x) = x^3$, then find the length of subtangent of the curve at any point (x, y) .

(c) যি কোনো বিন্দু (x, y) ত $y = \log \sin x$ ৰ বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় কৰা। 2

Find the radius of curvature of $y = \log \sin x$ at any point (x, y) .

(d) যদি $y = x^2 e^{ax}$ হয়, তেত্তে y_n নির্ণয় কৰা। 2

If $y = x^2 e^{ax}$, then find y_n .

অথবা / Or

যদি $y = \frac{1}{x^2 + a^2}$ হয়, তেত্তে y_n নির্ণয় কৰা। 2

If $y = \frac{1}{x^2 + a^2}$, then find y_n .

(e) যদি $\log y = \tan^{-1} x$ হয়, তেলে প্রমাণ কবা যে

$$(1 + x^2)y_2 + (2x - 1)y_1 = 0 \quad 4$$

If $\log y = \tan^{-1} x$, then prove that

$$(1 + x^2)y_2 + (2x - 1)y_1 = 0$$

অথবা /Or

মান নির্ণয় কবা (যি কোনো এটা) :

4

(i) $\text{Lt}_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$

(ii) $\text{Lt}_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \log(1 + x)}{x^2}$

Evaluate (any one) :

(i) $\text{Lt}_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$

(ii) $\text{Lt}_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \log(1 + x)}{x^2}$

7. (a) ডারব'ক্স-ব উপপাদ্যটো লিখা ।

2

State Darboux's theorem.

(b) মধ্যমান উপপাদ্যত

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c), \quad a < c < b;$$

চব মান নির্ণয় কবা যদি $f(x) = x^2$, যেতিয়া $a = 1$,

$$b = 2.$$

4

In the mean value theorem

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c), a < c < b;$$

find c if $f(x) = x^2$, when $a = 1, b = 2$.

অথবা /Or

e^x ক মেক্লেৰিনৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত বিস্তাৰ কৰা, য'ত শেষৰ পদটো হ'ব লাগাঞ্জ আকাৰৰ।

4

Expand e^x by Maclaurin's theorem with Lagrange form of remainder.

- (c) প্রমাণ কৰা যে যদি এটা ফলন f অন্তৰ $[a, b]$ ত অবিচ্ছিন্ন হয় আৰু $f(a) \neq f(b)$, তেন্তে f ফলনে $f(a)$ আৰু $f(b)$ ৰ মাজৰ সকলো মান লাভ কৰে।

3

Prove that, if a function f is continuous on $[a, b]$ and $f(a) \neq f(b)$, then it assumes every value between $f(a)$ and $f(b)$.

অথবা /Or

ক'চিৰ মধ্যমান উপপাদ্য উল্লেখ কৰি প্রমাণ কৰা।

3

State and prove Cauchy's mean value theorem.

8. (a) দুটা চলকৰ সমমাত্রাৰ ফলনৰ বাবে অয়লাবৰ উপপাদ্যৰ সূত্র লিখি প্রমাণ কৰা।

4

State and prove Euler's theorem on homogeneous function of two variables.

অথবা /Or

যদি $u = \sin^{-1} \frac{x^2 + y^2}{x + y}$, তেজে দেখুওৱা যে

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \tan u \quad 4$$

If $u = \sin^{-1} \frac{x^2 + y^2}{x + y}$, then show that

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \tan u$$

(b) দেখুওৱা যে $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, যদি

$$u = \log(x^2 + y^2). \quad 2$$

Show that $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, if

$$u = \log(x^2 + y^2).$$

9. (a) দেখুওৱা যে

$$\int_a^b f(a + b - x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad 2$$

Show that

$$\int_a^b f(a + b - x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

(b) যদি $f(x)$ এটা x ৰ যুগ্ম ফলন হয়, তেন্তে

$$\int_{-a}^{+a} f(x) dx = ? \quad 1$$

If $f(x)$ is an even function of x , then

$$\int_{-a}^{+a} f(x) dx = ?$$

(c) প্রমাণ কৰা যে

$$\int_0^{\pi/2} \log \tan x dx = 0 \quad 3$$

Prove that

$$\int_0^{\pi/2} \log \tan x dx = 0$$

অথবা / Or

প্রমাণ কৰা যে

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\pi}{4} \quad 3$$

Prove that

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\pi}{4}$$

(d) $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ ৰ লঘুকৰণৰ সূত্র নির্ণয় কৰা। 4

Obtain reduction formula for

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$$

(15)

অথবা /Or

$y = \log\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$ বক্রের 1র পৰা 2লৈ দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয়

কৰা।

4

Find the length of the curve

$y = \log\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$ from 1 to 2.
