Total No. of Printed Pages—11

1 SEM TDC MTH G 1

2018

(November)

MATHEMATICS

(General)

Course : 101

[A : Classical Algebra, B : Trigonometry, C : Vector Calculus]

Full Marks : 80

Pass Marks : 32/24

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

(A : Classical Algebra)

1. (a) এটা অনুক্ৰমৰ পৰিসৰৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define range of a sequence.

(b) তলৰ পদকেইটাৰ বাবে অনুক্ৰমৰ সূত্ৰ লিখা :

Write the sequence formula for the following terms : 2

$$1, 3, 6, 10, 15, \cdots$$

(c) প্ৰমাণ কৰা যে এটা অভিসাৰী অনুক্ৰমৰ এটাতকৈ বেছি সীমা নথাকে। 3

Prove that a convergent sequence cannot contain more than one limit.

(d) প্ৰমাণ কৰা যে $\{u_n\}$ অনুক্ৰমটো অভিসাৰী, য'ত

$$u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n}, \; n \in \mathbb{N}$$ 4

Prove that the sequence $\{u_n\}$ is convergent, where

$$u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n}, \; n \in \mathbb{N}$$

অথবা / *Or*

দেখুওৱা যে $\{u_n\}$ অনুক্ৰমটো অভিসাৰী, য'ত $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ আৰু $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ৰ সীমা 2 আৰু 3 ৰ মাজত আছে।

Show that the sequence $\{u_n\}$, where $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ is convergent and that limit of $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ lies between 2 and 3.

2\. *(a)* যদি এটা অসীম শ্ৰেণী Σu_n অভিসাৰী হয়, তেন্তে $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$ৰ মান লিখা। 1

If Σu_n is a convergent infinite series, then write the value of $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$.

(b) দেখুওৱা যে $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ অপসাৰী। 2

Show that $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ is divergent.

(c) এটা অসীম শ্ৰেণী অভিসাৰী হোৱা ডি-এলেমবাৰ্টৰ অনুপাত পৰীক্ষাৰ চৰ্তকেইটা লিখা। 2

State the conditions of d'Alembert's ratio test for convergence of a series.

(d) অভিসাৰীতা পৰীক্ষা কৰা (যি কোনো এটা) : 5

Test the convergence (any *one*) :

(i) $\frac{1}{4} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 7 \cdot 10} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13} + \cdots$

(ii) $\sum \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$

(e) প্ৰমাণ কৰা যে এটা ধনাত্মক অসীম শ্ৰেণী

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots \text{ to } \infty$$

অভিসাৰী, যদি $p > 1$ আৰু অপসাৰী, যদি $p \le 1$. 5

Prove that a positive term infinite series

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots \text{ to } \infty$$

is convergent if $p>1$ and divergent if $p\leq 1$.

3. (a) যদি $f(x)=0$ সমীকৰণৰ h এটা মূল হয়, তেন্তে $f(x)$ ৰ এটা উৎপাদক লিখা। 1

If h be a root of an equation $f(x)=0$, then write a factor of $f(x)$.

(b) $x^4+2x^2+3x-1=0$ সমীকৰণৰ মূলকেইটাৰ প্ৰকৃতি নিৰ্ণয় কৰা। 2

Find the nature of the roots of the equation $x^4+2x^2+3x-1=0$.

(c) যদি $x^3-5x^2+4x+20=0$ সমীকৰণৰ দুটা মূল সমান আৰু বিপৰীত চিহ্নযুক্ত হয়, সমীকৰণটো সমাধান কৰা। 2

The equation $x^3-5x^2+4x+20=0$ has two roots which are equal in magnitude and opposite in sign, solve it.

(d) $x^3+px-q=0$ সমীকৰণৰ যদি α, β, γ মূল হয়, তেনেহ'লে $\alpha^2+\beta^2$, $\beta^2+\gamma^2$, $\gamma^2+\alpha^2$ মূলবিশিষ্ট সমীকৰণটো নিৰ্ণয় কৰা। 5

If α, β, γ be the roots of $x^3 + px - q = 0$, find the equation whose roots are $\alpha^2 + \beta^2$, $\beta^2 + \gamma^2$, $\gamma^2 + \alpha^2$.

অথবা / *Or*

যদি $(x-a)^2$, $x^3 + 3px + q = 0$ ৰ এটা উৎপাদক হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $q^2 + 4p^3 = 0$.

If $(x-a)^2$ is a factor of $x^3 + 3px + q = 0$, then show that $q^2 + 4p^3 = 0$.

(e) সাধাৰণ ত্ৰিঘাত সমীকৰণ সমাধান কৰাৰ বাবে কাৰ্ডনৰ প্ৰণালীটো আলোচনা কৰা। 5

Discuss Cardan's method for solving a general cubic equation.

অথবা / *Or*

যদি $A, B, \cdots, L;\ a, b, \cdots, l,\ m \in R$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $\dfrac{A^2}{x-a} + \dfrac{B^2}{x-b} + \cdots + \dfrac{L^2}{x-l} = x + m$ ৰ সকলো মূল বাস্তৱ।

If $A, B, \cdots, L; a, b, \cdots, l, m \in R$, then prove that $\dfrac{A^2}{x-a} + \dfrac{B^2}{x-b} + \cdots + \dfrac{L^2}{x-l} = x + m$ has all its roots real.

(B : Trigonometry)

4. (a) যদি অপৰিমেয় সংখ্যা n ৰ বাবে $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ ৰ পৃথক মান পোৱা যায়, তেন্তে পৃথক মানৰ সংখ্যা লিখা। 1

If n is an irrational number, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ will have different values, then write the number of different values.

(b) $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = 0$ সমীকৰণৰ মূলকেইটাৰ n তম ঘাতবিশিষ্ট মূলৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা। 3

Find the equation whose roots are the nth powers of the roots of the equation $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = 0$.

(c) প্ৰমাণ কৰা যে

Prove that

$$\cos 7\theta = 64\cos^7\theta - 112\cos^5\theta + 56\cos^3\theta - 7\cos\theta$$ 4

অথবা / Or

যদি $(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)\cdots(a_n + ib_n) = A + iB$,

তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\tan^{-1}\frac{b_1}{a_1} + \tan^{-1}\frac{b_2}{a_2} + \cdots + \tan^{-1}\frac{b_n}{a_n} = \tan^{-1}\frac{B}{A}$$

If $(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)\cdots(a_n+ib_n)=A+iB$, then prove that

$$\tan^{-1}\frac{b_1}{a_1}+\tan^{-1}\frac{b_2}{a_2}+\cdots+\tan^{-1}\frac{b_n}{a_n}=\tan^{-1}\frac{B}{A}$$

5. *(a)* $\log(x+iy)$ ৰ বাস্তৱ অংশ লিখা। 1

Write the real part of $\log(x+iy)$.

(b) দেখুওৱা যে

Show that

$$\log(1+e^{i\theta})=\log\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)+i\frac{\theta}{2}$$ 4

অথবা / *Or*

π^i ৰ বাস্তৱ আৰু কাল্পনিক অংশ পৃথক কৰা।

Separate the real and imaginary parts of π^i.

(c) গ্ৰেগৰিৰ শ্ৰেণীটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা। 4

State and prove Gregory's series.

6\. *(a)* শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিওৱা : 1

Choose the correct answer :

$\sin(ix)$ তলৰ কোনটোৰ লগত সমান?

$\sin(ix)$ is equal to

(i) $i\sinh x$

(ii) $\sinh x$

(iii) $-i\sinh x$

(iv) $i\cosh x$

(b) যদি $\tan(\alpha + i\beta) = x + iy$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

If $\tan(\alpha + i\beta) = x + iy$, then prove that

$$x^2 + y^2 - 2y\coth 2\beta = 1$$ 3

(c) তলৰ শ্ৰেণীৰ সমষ্টি নিৰ্ণয় কৰা (যি কোনো এটা) : 4

Find the sum of the following series (any *one*) :

(i) $\cos^2\alpha + \cos^2(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+2\beta) + \cdots$ to n terms

(ii) $\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{2^2}\sin 3\alpha + \cdots$ to ∞

(C : Vector Calculus)

7. *(a)* ভেক্টৰ ফলনৰ সাধাৰণ অৱকলজৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define ordinary derivative of a vector function.

(b) শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিওৱা : 1

Choose the correct answer :

লেপ্লাছীয়ান অপৰাবেটৰ ∇^2 তলৰ কোনটোৰ লগত সমান ?

The Laplacian operator ∇^2 is equal to

(i) $\hat{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\dfrac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$

(ii) $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$

(iii) $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}+\dfrac{\partial}{\partial y}+\dfrac{\partial}{\partial z}\right)^2$

(iv) $\hat{i}\times\dfrac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\times\dfrac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\times\dfrac{\partial}{\partial z}$

(c) যদি $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

If $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$, then prove that

$$\nabla\cdot\vec{r}=3$$ 2

(d) যদি

$$\vec{A} = \sin x\hat{i} + \cos x\hat{j} + x\hat{k}$$
$$\vec{B} = \cos x\hat{i} - \sin x\hat{j} - 3\hat{k}$$

তেন্তে $\frac{d}{dx}(\vec{A} \times \vec{B})$ নিৰ্ণয় কৰা। 2

If

$$\vec{A} = \sin x\hat{i} + \cos x\hat{j} + x\hat{k}$$
$$\vec{B} = \cos x\hat{i} - \sin x\hat{j} - 3\hat{k}$$

then find $\frac{d}{dx}(\vec{A} \times \vec{B})$.

8. (a) $f = x^2yz - 4xyz^2$ ফলনটোৰ $2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টৰৰ দিশত (1, 3, 1) বিন্দুত দিশাংকীত অৱকলজ উলিওৱা। 4

Find the directional derivative of $f = x^2yz - 4xyz^2$ at the point (1, 3, 1) in the direction of vector $2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$.

(b) প্ৰমাণ কৰা যে

Prove that

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$ 5

অথবা / *Or*

দেখুওৱা যে $\nabla f(r) = \frac{f'(r)\vec{r}}{r}$, য'ত $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ আৰু $r = |\vec{r}|$.

Show that $\nabla f(r) = \frac{f'(r)\vec{r}}{r}$, where $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ and $r = |\vec{r}|$.

★★★