Total No. of Printed Pages—8

1 SEM TDC MTH G 1

2017

(November)

MATHEMATICS

(General)

Course : 101

[A : Classical Algebra, B : Trigonometry, C : Vector Calculus]

Full Marks : 80

Pass Marks : 32/24

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

(A : Classical Algebra)

1. (a) শূন্য অনুক্রমৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define null sequence.

(b) $\{u_n\} = \{1+(-1)^n\}, n \in N$ অনুক্রমটোৰ পৰিসৰ লিখা। 2

Write the range set of the sequence

$$\{u_n\} = \{1+(-1)^n\}, n \in N$$

(c) প্ৰমাণ কৰা যে প্ৰত্যেক অভিসাৰী অনুক্ৰম পৰিসীমিত। 3

Prove that every convergent sequence is bounded.

(d) ক'চিৰ অভিসাৰী সম্বন্ধীয় সাধাৰণ সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি দেখুওৱা যে $\{u_n\}$ অনুক্ৰমটো অভিসাৰী নহয়, য'ত

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$$ 4

Use general principle of Cauchy's criterion for convergence to show that $\{u_n\}$ is not convergent, where

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$$

অথবা / Or

দেখুওৱা যে $\{u_n\}$ অভিসাৰী, যদি

$$u_n = 1 + \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \cdots + \frac{1}{\lfloor n}$$

Show that $\{u_n\}$ is convergent, if

$$u_n = 1 + \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \cdots + \frac{1}{\lfloor n}$$

2. (a) বিকল্প শ্ৰেণীৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define alternating series.

(b) দেখুওৱা যে এটা শ্ৰেণী অপসাৰী য'ত nতম পদটো হৈছে $\sqrt{n^2+1}-n$. 2

Show that the series whose nth term is $\sqrt{n^2+1}-n$, is divergent.

(c) যদি Σu_n এটা ধনাত্মক পদৰ শ্ৰেণী হয়, য'ত

$$\lim_{n\to\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = l$$

তেনেহ'লে দেখুওৱা যে শ্ৰেণীটো $l<1$ ৰ বাবে অভিসাৰী। 4

If Σu_n is a positive term series, such that

$$\lim_{n\to\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = l$$

then show that the series converges if $l<1$.

(d) তলৰ যি কোনো দুটাৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা : 4×2=8

Test the convergence of any *two* of the following :

(i) $\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots$, for $p>0$

(ii) $\frac{1\cdot 2}{3^2} + \frac{2\cdot 3}{3^3} + \frac{3\cdot 4}{3^4} + \frac{4\cdot 5}{3^5} + \cdots$

(iii) $1 + \frac{3}{7}x + \frac{3\cdot 6}{7\cdot 10}x^2 + \frac{3\cdot 6\cdot 9}{7\cdot 10\cdot 13}x^3 + \cdots$

3. (a) যদি $x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48 = 0$ সমীকৰণৰ α, β, γ আৰু δ চাৰিটা মূল হয়, তেন্তে $\Sigma\alpha\beta\gamma$ ৰ মান লিখা। 1

If α, β, γ and δ are the four roots of the equation $x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48 = 0$, then find $\Sigma\alpha\beta\gamma$.

(b) $x^{2n} + 1 = 0$ সমীকৰণৰ ধনাত্মক আৰু ঋণাত্মক মূলৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা। 2

Find the number of positive and negative roots of the equation $x^{2n} + 1 = 0$.

(c) যদি $x^3 - px^2 - qx - r = 0$ সমীকৰণৰ মূলকেইটা গুণোত্তৰ প্ৰগতিত থাকে, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $p^3 r = q^3$. 3

If the roots of the equation

$$x^3 - px^2 - qx - r = 0$$

are in GP, then show that $p^3 r = q^3$.

4. (a) প্ৰমাণ কৰা যে n তম ঘাতৰ বীজগণিতীয় সমীকৰণ এটাৰ কেৱল n টা বাস্তৱ অথবা কাল্পনিক মূল থাকে। 5

Prove that every algebraic equation of degree n has exactly n real or imaginary roots.

অথবা / *Or*

যদি $x^3 + qx + r = 0$ সমীকৰণৰ α, β, γ মূল হয়, তেন্তে $\frac{\beta\gamma}{\alpha}, \frac{\gamma\alpha}{\beta}, \frac{\alpha\beta}{\gamma}$ মূলবিশিষ্ট সমীকৰণটো গঠন কৰা।

If α, β, γ are the roots of the equation $x^3 + qx + r = 0$, then form the equation whose roots are $\frac{\beta\gamma}{\alpha}, \frac{\gamma\alpha}{\beta}, \frac{\alpha\beta}{\gamma}$.

(b) কাৰ্ডানৰ নিয়মেৰে তলৰ যি কোনো এটাৰ সমাধান কৰা : 4

Solve any *one* of the following by Cardan's method :

(i) $x^3 - 12x + 65 = 0$

(ii) $x^3 - 3x^2 + 12x + 16 = 0$

(B : Trigonometry)

5. *(a)* মান লিখা : 1

Write down the value of

$$(\cos\theta - i\sin\theta)^{\frac{m}{n}}$$

(b) প্ৰমাণ কৰা যে

Prove that

$$\cos^2\theta = 1 - \frac{2\theta^2}{2!} + \frac{2^3\theta^4}{4!} - \cdots$$ 2

(c) n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হ'লে, প্ৰমাণ কৰা যে

If n be a positive integer, then prove that

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}$$ 5

অথবা / Or

$\sin\alpha$ ক α ৰ ঘাতত বিস্তৃত কৰা।

Expand $\sin\alpha$ in powers of α.

6. *(a)* মান লিখা :

Write down the value of

$$e^{2n\pi i}$$ 1

(b) প্ৰমাণ কৰা যে

$$\tan\left(i\log\frac{a-ib}{a+ib}\right) = \frac{2ab}{a^2-b^2}$$

য'ত a আৰু b দুটা বাস্তৱ ৰাশি। 4

Prove that

$$\tan\left(i\log\frac{a-ib}{a+ib}\right)=\frac{2ab}{a^2-b^2}$$

where a and b are two real quantities.

অথবা / *Or*

যদি $x=\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right)$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$y=-i\log\tan\left(\frac{ix}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

If $x=\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right)$, then prove that

$$y=-i\log\tan\left(\frac{ix}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

7. *(a)* গ্ৰেগ'ৰিৰ শ্ৰেণীটো উল্লেখ কৰা। 1

State Gregory's series.

(b) প্ৰমাণ কৰা

Prove that

$$\frac{\pi}{8}=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{9.11}+\cdots$$ 3

8. *(a)* প্ৰমাণ কৰা

Prove that

$$(\cosh x+\sinh x)^n=\cosh nx+\sinh nx$$ 3

(b) যোগফল নিৰ্ণয় কৰা (যি কোনো এটা) : 5

Find the sum (any *one*) :

(i) $\sin^2\alpha + \sin^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha+2\beta) + \cdots$ to n terms

(ii) $1 + \cos x + \frac{\cos 2x}{2!} + \frac{\cos 3x}{3!} + \cdots$ to ∞

(C : Vector Calculus)

9. (a) ভেক্টৰ বিন্দু ফলনৰ অবিচ্ছিন্নতাৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define continuity of a vector point function.

(b) সঁচা নে মিছা লিখা : 1

State True or False :

এটা সদিশ ৰাশিৰ বিন্দু ফলনৰ Curl এটা স্কেলাৰ ৰাশি।

Curl of a vector point function is a scalar quantity.

(c) এটা কণাই $x = 2t^2$, $y = t^2 - 4t$ আৰু $z = 3t - 5$ বক্ৰৰ দিশত গতি কৰে, য'ত t হ'ল সময়। কণাটোৰ বেগ নিৰ্ণয় কৰা, যেতিয়া $t = 1$ হয়। 2

A particle moves along the curve $x = 2t^2$, $y = t^2 - 4t$ and $z = 3t - 5$ where t is the time. Find the magnitude of the velocity at $t = 1$.

(d) যদি $\phi(x, y, z) = 3x^2y - y^3z^2$ হয়, তেন্তে $\nabla\phi$ ৰ মান $(1, -2, -1)$ বিন্দুত নির্ণয় কৰা। 2

If $\phi(x, y, z) = 3x^2y - y^3z^2$, then find the value of $\nabla\phi$ at the point $(1, -2, -1)$.

10. যদি $\vec{A} = x^2z^2\hat{i} - 2y^2z^2\hat{j} + xy^2z\hat{k}$ হয়, তেন্তে $\nabla \times (\nabla \times \vec{A})$ নির্ণয় কৰা। 4

If $\vec{A} = x^2z^2\hat{i} - 2y^2z^2\hat{j} + xy^2z\hat{k}$, then find $\nabla \times (\nabla \times \vec{A})$.

অথবা / *Or*

প্ৰমাণ কৰা (Prove that)

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

11. *(a)* অথবা *(b)* ৰ উত্তৰ কৰা : 5

Answer either *(a)* or *(b)* :

(a) প্ৰমাণ কৰা (Prove that) Curl $(\vec{A} \times \vec{B})$

$$= (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - \vec{B} \text{ div } \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{A} \text{ div} \vec{B}$$

(b) প্ৰমাণ কৰা $\nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2}$ য'ত n এটা ধ্ৰুবক আৰু $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, $r = |\vec{r}|$.

Prove that $\nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2}$ where n is constant and $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, $r = |\vec{r}|$.

★★★