1 SEM TDC MTH G 1

2016

(November)

MATHEMATICS

(General)

Course : 101

[A : Classical Algebra, B : Trigonometry, C : Vector Calculus]

Full Marks : 80

Pass Marks : 32 (Backlog) / 24 (2014 onwards)

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

(A : Classical Algebra)

1. তলত দিয়া প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ কৰা : 1×4=4

Answer the following questions :

(a) সঁচা নে মিছা লিখা :

State true or false :

প্ৰত্যেক অভিসাৰী অনুক্ৰম পৰিসীমিত।

Every convergent sequence is bounded.

(b) যোগাত্মক শ্ৰেণী কাক বোলে?

What is called positive series?

(c) p ৰ কি মানৰ বাবে তলৰ অসীম শ্ৰেণীটো অভিসাৰী আৰু অপসাৰী হ'ব?

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots \text{ to } \infty$$

For what values of p, the following infinite series will be convergent and divergent?

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots \text{ to } \infty$$

(d) বীজগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্যটো লিখা।

Write the fundamental theorem of algebra.

2. (a) এটা অনুক্ৰমৰ অভিসাৰিতা সম্বন্ধীয় কোচিৰ সাধাৰণ সূত্ৰটো লিখা। 2

Write the Cauchy's general principle of convergence of a sequence.

(b) প্ৰমাণ কৰা যে $\{n^2\}$ অনুক্ৰমটো একদিষ্ট বৰ্ধমান। 2

Prove that $\{n^2\}$ gives a monotonic increasing sequence.

(c) তলৰ শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা : 3

$$\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}-\frac{1}{5.6}+\cdots$$

Test for convergence of the series

$$\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}-\frac{1}{5.6}+\cdots$$

(d) এটা ত্ৰিঘাত সমীকৰণ গঠন কৰা যাৰ মূল $\frac{3}{2}$, $3+i\sqrt{5}$ 2

Form a cubic equation whose roots are $\frac{3}{2}$, $3+i\sqrt{5}$.

3. (a) দেখুওৱা যে $\{u_n\}$ অনুক্ৰমটো অভিসাৰী, যদি

$$u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}$$ 5

Show that the sequence $\{u_n\}$ is convergent, if

$$u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}$$

অথবা / *Or*

যদি $\{u_n\}$ এটা অনুক্ৰম আৰু $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=l$

য'ত $0\le l\le 1$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

If $\{u_n\}$ be a sequence and $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=l$, where $0\le l\le 1$, then prove that $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

(b) তলৰ শ্ৰেণীবোৰৰ যি কোনো দুটাৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা : 5×2=10

Test for convergence of any *two* of the following series :

(i) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{2^2}{3^3}+\frac{3^3}{4^4}+\cdots$ to ∞

(ii) $1+\frac{4}{9}x+\frac{9}{28}x^2+\frac{16}{65}x^3+\cdots$ to ∞

(iii) $\left(\frac{2^2}{1^2}-\frac{2}{1}\right)^{-1}+\left(\frac{3^3}{2^3}-\frac{3}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{4^4}{3^4}-\frac{4}{3}\right)^{-3}$ $+\cdots$ to ∞

4. প্ৰমাণ কৰা যে $(x-a)$, $p(x)$ ৰ এটা উৎপাদক হ'ব যদি $p(a)=0$ হয়। 4

Prove that $(x-a)$ is a factor of $p(x)$, if $p(a)=0$.

5. (a) $27x^3+42x^2-28x-8=0$ সমীকৰণৰ মূল-কেইটা গুণোত্তৰ প্ৰগতিত থাকিলে সমীকৰণটো সমাধান কৰা। 5

Solve the equation

$$27x^3+42x^2-28x-8=0$$

whose roots are in geometric progression.

অথবা / Or

কাৰ্ডনৰ নিয়মেৰে সমাধান কৰা

Solve by Cardan's method

$$x^3-30x+133=0$$

(b) ডেকার্টৰ নিয়মৰ সহায়ত $x^4+3x^2+2x-7=0$ সমীকৰণৰ মূলৰ প্ৰকৃতি নিৰ্ণয় কৰা। 3

Find the nature of roots of the equation $x^4+3x^2+2x-7=0$ by Descartes' rule.

অথবা / Or

যদি α_1, α_2, α_3; $x^3+x+1=0$ সমীকৰণৰ তিনিটা মূল হয়, প্ৰমাণ কৰা যে

$$(\alpha_1^2+1)(\alpha_2^2+1)(\alpha_3^2+1)=1$$

If α_1, α_2, α_3 be three roots of the equation $x^3+x+1=0$, prove that

$$(\alpha_1^2+1)(\alpha_2^2+1)(\alpha_3^2+1)=1$$

(B : Trigonometry)

6. (a) $\cos\alpha$ ক αৰ ঘাতত বিস্তৃত কৰোঁতে দ্বিতীয় পদটো কিমান? 1

What is the 2nd term in the expansion of $\cos\alpha$ in terms of α?

(b) যদি (If) $x_r=\cos\frac{\pi}{2^r}+i\sin\frac{\pi}{2^r}$, প্ৰমাণ কৰা যে (Prove that)

$$x_1x_2x_3\cdots \text{ to } \infty=1$$ 2

(c) যদি $x = \cos\theta + i\sin\theta$ আৰু $1 + \sqrt{1 - a^2} = na$, প্ৰমাণ কৰা যে

$$1 + a\cos\theta = \frac{a}{2n}(1 + nx)\left(1 + \frac{n}{x}\right)$$ 5

If $x = \cos\theta + i\sin\theta$ and $1 + \sqrt{1 - a^2} = na$, prove that

$$1 + a\cos\theta = \frac{a}{2n}(1 + nx)\left(1 + \frac{n}{x}\right)$$

অথবা / Or

যদি (If)

$$x = \frac{2}{\lfloor 1} - \frac{4}{\lfloor 3} + \frac{6}{\lfloor 5} - \frac{8}{\lfloor 7} + \cdots \text{ to } \infty$$

আৰু (and)

$$y = 1 + \frac{2}{\lfloor 1} - \frac{2^3}{\lfloor 3} + \frac{2^5}{\lfloor 5} - \cdots \text{ to } \infty$$

প্ৰমাণ কৰা যে (Prove that)

$$x^2 = y$$

7. (a) খালী ঠাঁই পূৰণ কৰা : 1

Fill in the blank :

জটিল সংখ্যাৰ ঘাতাংকৰ _____ সংখ্যক মান আছে।

Logarithm of a complex quantity has _____ number of values.

(b) যদি $\tan(x+iy) = u+iv$, প্ৰমাণ কৰা যে

$$u^2 + v^2 + 2u\cot 2x = 1$$ 4

If $\tan(x+iy) = u+iv$, prove that

$$u^2 + v^2 + 2u\cot 2x = 1$$

অথবা / Or

$(\alpha + i\beta)^{x+iy}$ ৰ বাস্তৱ আৰু কাল্পনিক অংশ পৃথক কৰা।

Separate the real and imaginary parts of $(\alpha + i\beta)^{x+iy}$.

8. গ্ৰেগৰিৰ শ্ৰেণীটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা। 4

State and prove Gregory's series.

অথবা / Or

যদি θ আৰু $\tan^{-1}(\sec\theta)$ ৰ মান 0 আৰু $\frac{\pi}{2}$ ৰ মাজত থাকে, প্ৰমাণ কৰা যে

$$\tan^{-1}(\sec\theta) = \frac{\pi}{4} + \tan^2\frac{\theta}{2} - \frac{1}{3}\tan^6\frac{\theta}{2} + \frac{1}{5}\tan^{10}\frac{\theta}{2} - \cdots$$

If the values of θ and $\tan^{-1}(\sec\theta)$ lies between 0 and $\frac{\pi}{2}$, then prove that

$$\tan^{-1}(\sec\theta) = \frac{\pi}{4} + \tan^2\frac{\theta}{2} - \frac{1}{3}\tan^6\frac{\theta}{2} + \frac{1}{5}\tan^{10}\frac{\theta}{2} - \cdots$$

9\. *(a)* *(i)* প্ৰমাণ কৰা যে (Prove that)

$$\sin ix = i\sinh x$$ 1

(ii) $\cos(x+iy)$ ক $A+iB$ আকাৰত প্ৰকাশ কৰা। 2

Express $\cos(x+iy)$ in the form $A+iB$.

(b) তলৰ শ্ৰেণীৰ সমষ্টি নিৰ্ণয় কৰা (যি কোনো এটা) : 5

Find the sum of the following series (any *one*) :

(i) $a\cos\alpha - \frac{a^2}{2}\cos 2\alpha + \frac{a^3}{3}\cos 3\alpha - \cdots$

$0 < a < 1$

(ii) $\operatorname{cosec}\theta + \operatorname{cosec}2\theta + \operatorname{cosec}2^2\theta + \cdots + \operatorname{cosec}2^{n-1}\theta$

(C : Vector Calculus)

10\. *(a)* ভেক্টৰ ফলনৰ অৱকলজৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define derivative of a vector function.

(b) তলত দিয়া ৰাশিটো শুদ্ধকৈ লিখা : 1

Write the following expression correctly :

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt} + \vec{B}\times\frac{d\vec{A}}{dt}$$

(c) যদি $\vec{r} = (x^2y^3 - x^3)\hat{i} + e^{xy}\hat{j} + x^2 \sin y\hat{k}$,

তেন্তে $\frac{\partial \vec{r}}{\partial x}$ আৰু $\frac{\partial \vec{r}}{\partial y}$ নিৰ্ণয় কৰা। 2

If $\vec{r} = (x^2y^3 - x^3)\hat{i} + e^{xy}\hat{j} + x^2 \sin y\hat{k}$,

then find $\frac{\partial \vec{r}}{\partial x}$ and $\frac{\partial \vec{r}}{\partial y}$.

11. $\phi = x^3 + y^3 + z^3$ ফলনটোৰ $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টৰৰ দিশত (1, −1, 2) বিন্দুত দিশাংকীত অৱকলজ উলিওৱা। 3

Find the directional derivative of $\phi = x^3 + y^3 + z^3$ at the point (1, −1, 2) in the direction of $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$.

অথবা / *Or*

যদি $\vec{A}$ আৰু $\vec{B}$ অঘূৰ্ণ ভেক্টৰ, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $\vec{A} \times \vec{B}$ পৰিনালিকীয়।

If $\vec{A}$ and $\vec{B}$ are irrotational, prove that $\vec{A} \times \vec{B}$ is solenoidal.

12. তলত দিয়া যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ কৰা : 4×2=8

Answer any *two* of the following :

(a) প্ৰমাণ কৰা যে (Prove that)

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

(b) যদি

$$\vec{u} = y\hat{i} + z\hat{j} + x\hat{k}$$
$$\vec{v} = xy\hat{i} + yz\hat{j} + zx\hat{k}$$

তেন্তে $\nabla \times (\vec{u} \times \vec{v})$ নির্ণয় কৰা।

If $\vec{u} = y\hat{i} + z\hat{j} + x\hat{k}$, $\vec{v} = xy\hat{i} + yz\hat{j} + zx\hat{k}$, then find $\nabla \times (\vec{u} \times \vec{v})$.

(c) প্ৰমাণ কৰা যে (Prove that)

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

★★★