

Total No. of Printed Pages—16

6 SEM TDC MTH G 1 (A/B)

2 0 1 8

(May)

MATHEMATICS

(General)

Course : 601

Full Marks : 80

Pass Marks : 32/24

Time : 3 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions*

GROUP—A

[(a) Abstract Algebra
(b) Elementary Statistics]

(a) Abstract Algebra

(Marks : 45)

1. (a) অৰণ্ড সংখ্যাব সংহতি Z -ত বিয়োগ প্ৰক্ৰিয়া এটা দ্বৈত
প্ৰক্ৰিয়া হ'ব নে? 1
Is the operation of subtraction a binary
composition on the set of integers Z ?
- (b) এটা চেমিগ্ৰুপৰ উদাহৰণ দিয়া ষিটো গ্ৰুপ নহয়। 1
Give one example of semi-group which
is not a group.

- (c) যোগ প্রক্রিয়াৰ সাপেক্ষে স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি \mathbb{N} গ্ৰুপ হয় নে নহয় নিৰ্ণয় কৰা। তোমাৰ উত্তৰৰ সপক্ষে কাৰণ দৰ্শোৱা। 2

Determine whether the set \mathbb{N} of natural numbers forms a group under addition. Give reasons to your answer.

- (d) প্রমাণ কৰা যে এটা গ্ৰুপ G -ত থকা সকলো a, b -ৰ বাবে $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. 2

Prove that for all a, b in a group G , $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

- (e) প্রমাণ কৰা যে এটা গ্ৰুপ G -ৰ এটা অ-বিক্ত সংহতি H , G -ৰ এটা উপগ্ৰুপ হ'ব যদি আৰু যদিহে

$$a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H \quad 3$$

Prove that a non-void subset H of a group G is a subgroup of G , if and only if

$$a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$$

- (f) 'এটা গ্ৰুপৰ কোটি' আৰু 'গ্ৰুপৰ এটা উপাদানৰ কোটি' বুলিলে কি বুজা? দেখুওৱা যে যদি G এটা সসীম গ্ৰুপ হয়, তেন্তে G -ৰ কোটি ইয়াৰ যি কোনো এটা উপাদানৰ কোটিৰে বিভাজ্য। $2+3=5$

What do you understand by the terms 'order of a group' and 'order of an element in a group'? Show that if G is a finite group, then order of any element of G divides the order of G .

- (g) চক্রীয় গ্রুপৰ জনক কাক কয়? প্রমাণ কৰা যে $\{1, -1, i, -i\}$ সংহতিটো পূৰ্ণ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে এটা চক্রীয় গ্রুপ। 1+2=3

What is meant by the generator of a cyclic group? Prove that the set $\{1, -1, i, -i\}$ forms a cyclic group with respect to multiplication.

2. (a) গ্রুপৰ অট'মৰ্ফিজিমৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define automorphism of a group.

- (b) ধৰা $H = \langle 5 \rangle$, 5 ব গুণিতকবোৰৰ সংহতি অখণ্ড সংখ্যা Z ব যোগজ গ্রুপৰ এটা উপসংহতি। Z ত থকা H ব সকলো কছেটবোৰ লিখা। 2

Let Z be the additive group of integers and $H = \langle 5 \rangle$ be the subgroup of Z consisting of all the multiples of 5. Write all the cosets of H in Z .

- (c) হ'ম'মৰ্ফিজিমৰ কাৰ্ণেলৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্রমাণ কৰা যে এটা গ্রুপ G ব পৰা আন এটা গ্রুপ G' ত থকা হ'ম'মৰ্ফিজিম f এটা ম'ন'মৰ্ফিজিম হ'ব যদি আৰু যদিহে $\text{Ker } f = \{e\}$, $e \in G$ ব আইডেনটিটি। 1+4=5

Define Kernel of homomorphism. Prove that a homomorphism f of a group G into a group G' is a monomorphism if and only if $\text{Ker } f = \{e\}$, e is the identity in G .

3. (a) কেলিৰ সূত্রটো লিখা। 1
State Cayley's theorem.

(b) দুটা বিন্যাস কেতিয়া অসংলগ্ন হয়? 1
When are two permutations said to be disjoint?

(c) ট্রান্সপজিচন কি? $S = \{1, 2, 3, 4\}$ সংহতিটোৰ সকলো সম্ভাৱ্য ট্রান্সপজিচনবোৰ লিখা। $1+1=2$
What is transposition? Write all the possible transpositions of the set $S = \{1, 2, 3, 4\}$.

(d) তলত দিয়া বিন্যাসটো দুটা চক্রৰ পূৰণফল হিচাপে প্রকাশ কৰা : 2
Express the permutation given below as the product of two cycles :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

(e) ধৰা G এটা গ্রুপ আৰু $a \in G$. তেন্তে প্রমাণ কৰা যে $f_a : G \rightarrow G$, য'ত $f_a(x) = axa^{-1}$, $x \in G$ এটা অট'মৰ্ফিজিম। 4

Let G be a group and $a \in G$. Then prove that the mapping $f_a : G \rightarrow G$ defined by $f_a(x) = axa^{-1}$, $x \in G$ is an automorphism of G .

4. (a) এটা উদাহৰণেৰে প্ৰমাণ কৰা যে বিং এটাৰ দুটা আইডিয়েলৰ সংযোগ এটা আইডিয়েল নহ'বও পাৰে। 1

Give an example to prove that the union of two ideals may not be an ideal of a ring.

- (b) প্ৰমাণ কৰা যে এটা বিং R ত থকা যি কোনো a, b বাবে

Prove that for all a, b in a ring R ,

$$a(-b) = (-a)b = -(ab) \quad 2$$

- (c) ইণ্টিগ্ৰেল ড'মেইনৰ সংজ্ঞা দিয়া। দেখুওৱা যে যোগ আৰু পূৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰ বাবে Z এটা ইণ্টিগ্ৰেল ড'মেইন। $1+2=3$

Define integral domain. Show that the set Z under usual addition and multiplication is an integral domain.

- (d) বিং-ৰ আইডিয়েলৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্ৰমাণ কৰা যে যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি E , অখণ্ড সংখ্যাৰ বিং Z ৰ এটা আইডিয়েল। $2+2=4$

Define ideal of a ring. Prove that the set E of even integers is an ideal of the ring Z of integers.

(b) Elementary Statistics

(Marks : 35)

5. (a) সম-সম্ভাব্য অৱস্থা এটাৰ উদাহৰণ দিয়া। 1
Give example of an equally likely case.
- (b) যি কোনো দুটা ঘটনা A আৰু B ব বাবে প্ৰমাণ কৰা 2
For any two events A and B , prove that
$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$
- (c) দুটা পাশা নিষ্ক্ষেপ কৰা হ'ল। দুটাৰ যোগফল 9 তকৈ 3
বেছি হোৱাৰ সম্ভাব্যতা কিমান ?
Two dice are thrown. What is the probability that the sum is greater than 9?
- (d) বেইজৰ উপপাদ্যটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা। 1+4=5
State and prove Bayes' theorem.
6. (a) কোনটো প্ৰসাৰৰ ভাল মাপ—চতুৰ্থক বিচলন নে গড় 1+1=2
বিচলন? তোমাৰ উত্তৰৰ সপেক্ষে কাৰণ দৰ্শোৱা।
Which one is a better measure of dispersion—quartile deviation or mean deviation? Give reasons to you answer.
- (b) প্ৰসাৰ সহগ আৰু বিচৰণ সহগ বুলিলে কি বুজা? 1+1+1=3
প্ৰামাণিক বিচলনক ভিত্তি কৰা প্ৰসাৰ সহগ উল্লেখ কৰা।

What do you understand by coefficient of dispersion and coefficient of variation? Give the expression for coefficient of dispersion based on standard deviation.

7. (a) দেখুওৱা যে দুটা স্বতন্ত্ৰ বিচৰ সহসম্বন্ধিত নহয়। 2
Show that two independent variables are uncorrelated.

- (b) সমাপ্ৰায়ণ বেখা কি? সহসম্বন্ধিত নহয় এমন দুটা স্বতন্ত্ৰ বিচৰৰ ক্ষেত্ৰত সমাপ্ৰায়ণ বেখাৰ মাজৰ কোণৰ পৰিমাণ কি হ'ব? 1+1=2

What is the line of regression? What is the angle between the lines of regression when the two independent variables are uncorrelated?

- (c) দুটা বিচৰ X আৰু Y , $aX + bY + c = 0$ সমীকৰণ দ্বাৰা যুক্ত। দেখুওৱা যে ইহঁতৰ মাজৰ সহসম্বন্ধ -1 যদি a আৰু b একেই চিন যুক্ত হয় আৰু $+1$ যদি চিন দুটা বেলেগ হয়। 3

Two variables X and Y are connected by the equation $aX + bY + c = 0$. Show that the correlation between them is -1 if the signs of a and b are alike and $+1$ if they are different.

8. (a) স্বাভাৱিক সম্ভাব্যতা বক্ৰৰ দুটা ধৰ্ম উল্লেখ কৰা। 2
Mention two properties of normal probability curve.

- (b) দহটা ভাবসাম্য থকা মুদ্রা একে সময়তে নিষ্ক্ষেপ কৰা হ'ল। তিনিটাতকৈ অধিক মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাব্যতা কিমান?

3

Ten unbiased coins are tossed simultaneously. Find the probability of obtaining more than three heads.

- (c) পূৰ্বৰ অভিজ্ঞতাৰ পৰা দেখা যায় যে এটা উদ্যোগক্ষেত্ৰত প্ৰতি মাহে গড়ে 4টা কৈ উদ্যোগিক দুৰ্ঘটনা হয়। তেনেহ'লে এটা বছৰত 4টাত কৈ কম দুৰ্ঘটনা হোৱাৰ সম্ভাব্যতা নিৰ্ণয় কৰা। পয়ছনৰ বৰ্টন ব্যৱহাৰ কৰা ($e^{-4} = 0.0183$).

3

It is known from past experience that in a certain plant there are on average 4 industrial accidents per month. Find the probability that in a given year there will be less than 4 accidents. Assume Poisson distribution ($e^{-4} = 0.0183$).

- (d) ধৰা 800 জন ছাত্ৰৰ প্ৰসামান্য বৰ্দ্ধিত কঁকালৰ মাপৰ (W) মাধ্য 66 চে. মি. আৰু প্ৰামাণিক বিচলন 5 চে. মি.। 65 চে. মি. আৰু 70 চে. মি.ৰ মাজত কঁকালৰ মাপ থকা ছাত্ৰৰ সংখ্যা N নিৰ্ণয় কৰা।

4

Suppose the waist measurements W of 800 students are normally distributed with mean 66 cm and standard deviation 5 cm. Find the number N of students with waists between 65 cm and 70 cm.

GROUP—B

[(a) Discrete Mathematics
(b) Metric Space]

(a) Discrete Mathematics

(Marks : 45)

1. (a) এটা যৌগিক বাক্য মানে কি? 1
What is a composite sentence?
(b) তলৰ বাক্যকেইটা প্ৰতীকাত্মক ৰূপত লিখা : 1+1=2
Symbolize the following sentences :
(i) 2 টা মৌলিক আৰু 6 টা যৌগিক।
2 is prime and 6 is composite.
(ii) যদি তাই এইটো কৰে, তেন্তে তাইক পুৰস্কাৰ দিয়া হ'ব।
If she does it, she will be rewarded.
(c) তলৰ উক্তিটোৰ সত্যতা তালিকা প্ৰস্তুত কৰা : 2
Find the truth table of the following statement :
$$(P \vee R) \wedge (R \rightarrow \neg Q)$$

(d) স্বতঃসত্য মানে কি? প্ৰমাণ কৰা যে—
What is tautology? Prove that—
(i) $\models (A \rightarrow B \wedge \neg B) \rightarrow \neg A$;
(ii) $\models (A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B))$. 1+2+2=5

2. (a) স্বতঃসিথ্যা মানে তুমি কি বুজা ? 1

What do you mean by contradiction?

- (b) প্রমাণ কৰা যে উক্তিৰ সংহতি $\{A_1, A_2, \dots A_m\}$ গ্রহণযোগ্য নহয়, যদি সংহতিটোৰ ফলস্বৰূপে স্বতঃসিথ্যা পোৱা যায়। 3

Prove that the set $\{A_1, A_2, \dots A_m\}$ of statements is not satisfiable, if a contradiction can be derived as a consequence of the set.

- (c) ধৰাওক Px য়ে 'x এটা মৌলিক', Ex য়ে 'x এটা বুথ', Ox য়ে 'x এটা অযুথ' আৰু Dxy য়ে 'x য়ে y ক ভাগ কৰে' বুজায়। তলৰ উক্তিবোৰ সাধাৰণ ইংৰাজীলৈ লিখা (যি কোনো তিনিটা) : $2 \times 3 = 6$

Suppose Px for 'x is prime', Ex for 'x is even' Ox for 'x is odd' and Dxy for 'x divides y'. Translate the following into general English (any three) :

(i) $(x)(Px \rightarrow (\exists y)(Ey \wedge Dxy))$

(ii) $(x)(Ox \rightarrow (y)(Px \rightarrow \neg Dxy))$

(iii) $(\exists x)(Ex \wedge Dx6)$

(iv) $(x)(\neg Ex \rightarrow \neg D2x)$

3. (a) লেটিচৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define lattice.

(b) তলৰ কোনটো লেটিছ বিশ্বজনীন সীমাবদ্ধতা আছে? 2

Which of the following lattices have the universal bounds?

(i) (Z^+, \leq) , য'ত Z^+ ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ সমষ্টি

(Z^+, \leq) , where Z^+ is set of positive integers

(ii) $(\{\dots, -3, -2, -1, 0\}, \leq)$

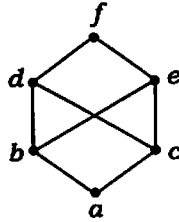
(iii) (Z, \leq) , য'ত Z অখণ্ড সংখ্যাৰ সমষ্টি

(Z, \leq) , where Z is set of integers

(iv) $(\{1, 2, \dots, 100\}, \leq)$

(c) দেখুওৱা যে তলৰ চিত্ৰত দিয়া প'চেট (L, \leq) টো লেটিছ নহয় : 3

Show that the poset (L, \leq) given in the following figure is not a lattice :



(d) লেটিছ আইচ'মৰ্ফিজিমৰ সংজ্ঞা দিয়া। দেখুওৱা যে $(P\{a, b, c\}, \subseteq)$ আৰু (D_{30}, V) লেটিছ দুটা আইচ'মৰ্ফিক, য'ত $P\{a, b, c\}$ য়ে $\{a, b, c\}$ ৰ ঘাতসমষ্টি আৰু D_{30} য়ে 30 ৰ সকলো ভাজকৰ সমষ্টি বুজায়।

1+3=4

Define lattice isomorphism. Show that two lattices $(P\{a, b, c\}, \subseteq)$ and (D_{30}, V) , where $P\{a, b, c\}$ represents power set of $\{a, b, c\}$ and D_{30} means the set of all divisors of 30, are isomorphic.

নাইবা / Or

প্রমাণ কবা যে প্রত্যেক শৃঙ্খল একোটা বিভবণ লেটিচ। 4

Prove that every chain (L, \leq) is a distributive lattice.

4. (a) এটা পৰিপূৰক বিভবণ লেটিচ-ৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define a complemented distributive lattice.

(b) দেখুওৱা যে $L = \{0, 1, a\}$ লেটিচটো বুলিয়ান এলজেব্ৰা নহয়। 2

Show that a lattice $L = \{0, 1, a\}$ is not a Boolean algebra.

(c) দেখুওৱা যে $(P(X), \cup, \cap, ', \phi, X)$ এটা বুলিয়ান এলজেব্ৰা, য'ত $P(X)$ য়ে X ৰ ঘাতসমষ্টি বুজায়। 3

Show that $(P(X), \cup, \cap, ', \phi, X)$, where $P(X)$ for power set of X , is a Boolean algebra.

(d) বুলিয়ান উপএলজেব্ৰাৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্রমাণ কবা যে বুলিয়ান এলজেব্ৰা B ৰ এটা অশূন্য উপসমষ্টি S বুলিয়ান উপএলজেব্ৰা হ'ব যদি ই + আৰু / বা . আৰু / ত আবদ্ধ হয়।

1+3=4

Define Boolean subalgebra. Prove that a non-empty subset S of a Boolean algebra B is a Boolean subalgebra if it is closed under + and ' or under . and '.

নাইবা / Or

দ্বিবিচার মূল্যায়ন পদ্ধতিবে যোগ-পূৰণ কেন'নিকেল আকাৰলৈ নিয়া

Using binary valuation, find the sum-products canonical form

$$\alpha = \overline{(\bar{x}_1 + x_3)(\bar{x}_2 + \bar{x}_3)}((x_1x_2)x_3) \quad 4$$

- (e) নিম্নলিখিতক সংক্ষিপ্ত যোগ-পূৰণ প্রকাশ ভংগিত লিখা (ক'নট মেপ ব্যৱহাৰ কৰা) : 5

Find a minimal sum-product representation of the following (use Karnaugh map) :

(i) $a\bar{b}\bar{c} + ab\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c}$

(ii) $ab\bar{c} + abc + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}bc$

(b) Metric Space

(Marks : 35)

5. (a) মেট্রিক ক্ষেত্র (X, d) ৰ ত্ৰিভুজীয় অসমতা চৰ্তটো লিখা। 1
Write the triangular inequality property of a metric space (X, d) .
- (b) এখন মেট্রিক ক্ষেত্ৰত সামীপ্যৰ সংজ্ঞা দিয়া। 2
Define neighbourhood in a metric space.
- (c) প্রমাণ কৰা যে এখন মেট্রিক ক্ষেত্ৰ (X, d) ৰ বিস্তৃত সংহতি ϕ আৰু সমগ্র সমষ্টি X মুক্ত সংহতি। 3

Prove that the null set ϕ and the whole set X of a metric space (X, d) are open sets.

- (d) প্রমাণ কৰা যে এখন মেট্রিক ক্ষেত্র (X, d) ত প্রত্যেকটো মুক্ত গোলক একোটা মুক্ত সংহতি। 4

Prove that in a metric space (X, d) every open sphere is an open set.

- (e) যদি (X, d) মেট্রিক ক্ষেত্রৰ (Y, d_y) এখন মেট্রিক উপক্ষেত্র হয় আৰু $A \subset Y$ হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে A সমষ্টিটো Y ত মুক্ত হ'ব যদি আৰু একমাত্র যদি, $\exists X$ ব এটা মুক্ত সংহতি G যাতে $A = G \cap Y$. 5

If (Y, d_y) is a subspace of a metric space (X, d) and $A \subset Y$, then prove that A is open in Y if and only if, \exists an open set G in X such that $A = G \cap Y$.

নাইবা / Or

- যদি (X, d) এখন মেট্রিক ক্ষেত্র হয় আৰু $A \subset X$, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে A বন্ধ হ'ব যদি আৰু একমাত্র যদি A ত ইয়াৰ সকলো সীমা বিন্দু থাকে। 5

If (X, d) is a metric space and $A \subset X$, then prove that A is closed if and only if A contains all its limit points.

6. (a) এখন মেট্রিক ক্ষেত্রত পবিসীমিত অনুক্রমৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define bounded sequence in a metric space.

(b) এখন মেট্রিক স্পেসের ক'চি অনুক্রম মানে কি? 2
 What is Cauchy sequence in a metric space?

(c) প্রমাণ করা যে এখন মেট্রিক স্পেস (X, d) এর প্রত্যেক অভিসারী অনুক্রম $\{x_n\}$ এর বৈশিষ্ট্য হচ্ছে প্রত্যেক $\varepsilon > 0$ এর কাবণে, \exists এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা N যাতে $d(x_m, x_n) < \varepsilon, \forall m, n \geq N$. 3

Prove that for every convergent sequence $\{x_n\}$ in a metric space (X, d) has the property for each $\varepsilon > 0, \exists$ a positive integer N such that $d(x_m, x_n) < \varepsilon, \forall m, n \geq N$.

(d) যদি সম্পূর্ণ মেট্রিক স্পেস (X, d) এর X এর ঘন মুক্ত সমষ্টিব অনুক্রম $\{G_n\}$ হয়, তেলে প্রমাণ করা যে $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n, X$ ত ঘন হ'ব। 6

If $\{G_n\}$ be a sequence of dense open sets of X in the complete metric space

(X, d) , then prove that $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ is

dense in X .

নাইবা / Or

প্রমাণ করা যে (X, d) মেট্রিক স্পেসের পৃথকীকরণ হয় যদি আক একমাত্র যদি ই দ্বিতীয় গণনীয় হয়। 6

Prove that a metric space (X, d) is separable if and only if it is second countable.

7. (a) (X, d) মেট্রিক স্পেসত সাদৃশ্য ফলন $I: X \rightarrow X$ এটা
অনবচ্ছিন্ন ফলন হয়নে? 1

Is the identity function $I: X \rightarrow X$ in a
metric space (X, d) continuous?

(b) ফলনৰ বিস্তাৰণ আৰু সীমাবদ্ধতা কি কি? 2

What are extension and restriction of
functions?

(c) প্রমাণ কৰা যে যদি (X, d) , (Y, ρ) আৰু (Z, σ)
মেট্রিক স্পেস হয় আৰু X , Y ব হ'মিঅ'মৰ্ফিক;
 Y , Z ব হ'মিঅ'মৰ্ফিক হয়, তেন্তে X , Z ব
হ'মিঅ'মৰ্ফিক হ'ব। 5

Prove that if (X, d) , (Y, ρ) and (Z, σ) are
metric spaces, and X is homeomorphic
to Y and Y is homeomorphic to Z , then
 X is homeomorphic to Z .

নাইবা / Or

যদি (X, d) আৰু (Y, ρ) মেট্রিক স্পেস হয়,
 $f: X \rightarrow Y$ এটা অনবচ্ছিন্ন ফলন হয় আৰু $A \subset X$,
তেন্তে প্রমাণ কৰা যে সীমাবদ্ধতা f_A , A ত অনবচ্ছিন্ন। 5

If (X, d) and (Y, ρ) are metric spaces,
 $f: X \rightarrow Y$ is continuous function and
 $A \subset X$, then prove that the restriction f_A
is continuous on A .
