Total No. of Printed Pages—15

6 SEM TDC MTH G 1

2016

(May)

MATHEMATICS

(General)

Course : 601

Full Marks : 80
Pass Marks : 32

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

GROUP—A

[**(a) Abstract Algebra**
(b) Elementary Statistics]

(a) Abstract Algebra

(*Marks* : 45)

1. *(a)* পৰিমেয় সংখ্যাৰ পূৰণ প্ৰক্ৰিয়া সাপেক্ষে পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতি Q এটা গ্ৰুপ হয় নে? তোমাৰ উত্তৰৰ কাৰণ দৰ্শোৱা। 1+1=2

Does the set Q of all rational numbers form a group under the operation of multiplication of rational numbers? Give reasons to your answer.

(b) যি কোনো গ্ৰুপ Gৰ বাবে প্ৰমাণ কৰা যে

In any group G, prove that

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}, \quad \forall\, a, b \in G$$ 2

(c) অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি Zত '*' এটা দ্বিবিচাৰ প্ৰক্ৰিয়া য'ত $a * b = a + b + 1$, $\forall\, a, b \in Z$. '*'ৰ সাপেক্ষে Zৰ অভেদ উপাদান নিৰ্ণয় কৰা। 2

In the set Z of integers, the binary operation '*' is defined as $a * b = a + b + 1$, $\forall\, a, b \in Z$. Find the identity element in Z w.r.t. '*'.

(d) যদি G এটা n কোটি বিশিষ্ট সসীম গ্ৰুপ হয় আৰু $a \in G$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা $a^n = e$ য'ত e, Gৰ একক উপাদান। 3

If G is a finite group of order n and $a \in G$, then prove that $a^n = e$, where e is the identity element in G.

(e) প্ৰমাণ কৰা যে, মৌলিক কোটি বিশিষ্ট গ্ৰুপ সদায় চক্ৰীয় গ্ৰুপ। 3

Prove that every group of prime order is cyclic.

(f) উদাহৰণৰ সৈতে উপগ্ৰুপৰ সংজ্ঞা লিখা। দেখুওৱা যে, দুটা উপগ্ৰুপৰ মিলন এটা উপগ্ৰুপ নহ'বও পাৰে। 2+3=5

Define subgroup with an example. Prove that the union of two subgroups is not necessarily a subgroup.

2\. *(a)* দেখুওৱা যে, $f : Z \to E$ এটা আইছ'মৰ্ফিজম য'ত $f(x) = 2x,\ \forall\, x \in Z$, Z আৰু E যথাক্ৰমে যোগ প্ৰক্ৰিয়া সাপেক্ষে অখণ্ড সংখ্যাৰ আৰু যুগ্ম সংখ্যাৰ গ্ৰুপ। 3

Show that the mapping $f : Z \to E$ defined by $f(x) = 2x,\ \forall\, x \in Z$ is an isomorphism where Z and E are the additive group of integers and even integers respectively.

(b) যদি f, গ্ৰুপ Gৰ পৰা গ্ৰুপ G'ৰ ওপৰত হ'ম'মৰ্ফিজম হয় আৰু K, fৰ কাৰ্ণেল হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে, f এটা আইছ'মৰ্ফিজম হ'ব যদি আৰু যদিহে $K = \{e\}$, য'ত e, Gৰ একক উপাদান। 5

If f is a homomorphism from a group G to a group G' with kernel K, then prove that f is an isomorphism if and only if $K = \{e\}$, where e is the identity element in G.

নাইবা / Or

কোশেণ্ট গ্ৰুপৰ সংজ্ঞা দিয়া। যদি $H = \{3x : x \in Z\}$ আৰু Z যোগ প্ৰক্ৰিয়া সাপেক্ষে অখণ্ড সংখ্যাৰ গ্ৰুপ হয়, তেন্তে কোশেণ্ট গ্ৰুপ Z/Hৰ উপাদানবোৰ নিৰ্ণয় কৰা। 5

Define quotient group. Let Z be the additive group of integers and $H = \{3x : x \in Z\}$, then determine the elements of the quotient group Z/H.

3. (a) n মাত্ৰা বিশিষ্ট যুগ্ম বিন্যাসৰ গ্ৰুপৰ কোটি কিমান? 1

What is the order of the group of all even permutations of degree n?

(b) কেলিৰ সূত্ৰটো লিখা। 2

State Cayley's theorem.

(c) যদি $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ আৰু $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ হয়, তেনেহ'লে f আৰু g য়ে পূৰণৰ ক্ৰমবিনিময় বিধি সিদ্ধ কৰে নে পৰীক্ষা কৰা। 3

If $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ and $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, then examine whether f and g satisfy commutative law of multiplication.

(d) প্ৰমাণ কৰা যে $a \to a^{-1}$, $a \in G$, গ্ৰুপ Gৰ এটা অট'মৰ্ফিজম হ'ব যদি আৰু যদিহে G এটা এবেলিয়ান গ্ৰুপ হয়। 4

Prove that $a \to a^{-1}$, $a \in G$ is an automorphism of a group G if and only if G is Abelian.

4. (a) ৰিং-ৰ শূন্য বিভাজক কি? অখণ্ড সংখ্যাৰ ৰিং Zৰ শূন্য বিভাজক আছে নে? 1+1=2

What is zero divisor of a ring? Does the ring of integers Z possess zero divisor?

(b) দুটা উপৰিং-ৰ ছেদনও এটা উপৰিং—প্ৰমাণ কৰা। 3

Intersection of two subrings is a subring—prove it.

নাইবা / *Or*

উদাহৰণৰ সৈতে ৰিং-ৰ আইডিয়েলৰ সংজ্ঞা দিয়া। 3

Define ideal of a ring with an example.

(c) ফিল্ড আৰু ইন্টিগ্ৰেল ড'মেইনৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্ৰমাণ কৰা যে প্ৰত্যেক ফিল্ড এটা ইন্টিগ্ৰেল ড'মেইন। 1+1+3=5

Define field and integral domain. Prove that every field is an integral domain.

নাইবা / *Or*

যদি a আৰু b দুটা পৰিমেয় সংখ্যা হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে F এটা ফিল্ড য'ত দিয়া আছে

If a and b are two rational numbers, then prove that F is a field where

$$F = \{1 + b\sqrt{2} : a, b \in Q\}$$ 5

(b) Elementary Statistics

(*Marks* : 35)

5. (a) সৰল ঘটনা আৰু যৌগিক ঘটনাৰ মাজত পাৰ্থক্য কি? 2

What is the difference between simple event and composite event?

(b) যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা এটা লিপ্‌ইয়েৰত 53টা দেওবাৰ থকাৰ সম্ভাৱনা কিমান? 3

What is the chance that a leap-year selected at random will contain 53 Sundays?

(c) প্ৰমাণ কৰা যে অশূন্য ছেদন বিশিষ্ট দুটা ঘটনা A আৰু Bৰ বাবে

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

A আৰু B নমুনা সংহতি Sৰ দুটা উপসংহতি। 3

If A and B are any two events (subsets of sample spaces) and are not disjoint, then prove that

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(d) প্ৰমাণ কৰা যে যোগাত্মক সম্ভাৱিতা থকা দুটা ঘটনা A আৰু B স্বতন্ত্ৰ হ'ব যদি আৰু যদিহে—

Two events A and B with positive probabilities are independent if and only if—

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$ 3

6. (a) বণ্টনৰ বিস্তাৰ বুলিলে কি বুজা? 1

What do you understand by range of a distribution?

(b) দুটা ফার্ম A আৰু Bএ শ্ৰমিক সকলক দিয়া মাহিলি বেতনৰ বিশ্লেষণ তলত দিয়া ধৰণৰ :

	ফার্ম A	ফার্ম B
শ্ৰমিকৰ সংখ্যা	500	600
গড় দৈনিক মজুৰী	₹ 186·00	₹ 175·00
মজুৰীৰ বণ্টনৰ বিচলন	81	100

A আৰু B দুয়োটা ফার্ম একেলগে লৈ সমূহ শ্ৰমিকৰ *(i)* দৈনিক গড় মজুৰী আৰু *(ii)* মজুৰী বণ্টনৰ বিচলন নিৰ্ণয় কৰা। 4

An analysis of monthly wages paid to the workers of two firms A and B belonging to the same industry gives the following results :

	Firm A	Firm B
Number of workers	500	600
Average daily wage	₹ 186·00	₹ 175·00
Variance of distribution of wages	81	100

Calculate *(i)* the average daily wage and *(ii)* the variance of the distribution of wages of all the workers in the firms A and B taken together.

7. (a) যদি চলক দুটা আনকোৰিলেটেড হয়, তেন্তে বিগ্ৰেছন ৰেখাৰ প্ৰকৃতি কি হ'ব, লিখা। 1

Write the nature of the lines of regression if the two variables are uncorrelated.

(b) শুদ্ধ অথবা অশুদ্ধ লিখা : 2

Write True or False :

(i) কোৰিলেছন সহগ ৰিগ্ৰেছন সহগৰ জ্যামিতিক মাধ্য।

Correlation coefficient is the geometric mean between the regression coefficients.

(ii) ৰিগ্ৰেছন সহগ মূলবিন্দুৰ পৰিবৰ্তন সাপেক্ষে স্বতন্ত্ৰ নহয় কিন্তু স্কেল সাপেক্ষে স্বতন্ত্ৰ।

Regression coefficients are not independent of the change of origin but of scale.

(c) প্ৰমাণ কৰা যে কোৰিলেছন সহগ মূলবিন্দু আৰু স্কেলৰ পৰিবৰ্তন সাপেক্ষে স্বতন্ত্ৰ। 4

Prove that correlation coefficient is independent of change of origin and scale.

8. *(a)* ছটা মুদ্ৰা 6400 বাৰ টছ্ কৰা হ'ল। পয়চন সম্ভাৱিতা বণ্টন ব্যৱহাৰ কৰি ছটা মুণ্ড r বাৰ পোৱাৰ আনুমানিক সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা। 3

Six coins are tossed 6400 times. Using Poisson distribution, find the approximate probability of getting six heads r times.

(b) দহটা মুদ্ৰা একেলগে নিক্ষেপ কৰা হ'ল। কমেও সাতটা মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা। 3

Ten coins are thrown simultaneously. Find the probability of getting at least seven heads.

(c) সাধাৰণ সম্ভাৱিতা বক্ৰ নিৰ্দেশ কৰা সমীকৰণটো লিখা আৰু ইয়াৰ চাৰিটা ধৰ্ম উল্লেখ কৰা। 2+4=6

Write the equation for the normal probability curve and mention four properties of it.

GROUP—B

[(a) **Discrete Mathematics**

(b) **Metric Space**]

(a) Discrete Mathematics

(*Marks* : 45)

1. *(a)* $\neg(\neg P \wedge Q)$ উক্তিটোৰ অস্বীকাৰ কৰা উক্তিটো লিখা। 1

Write the denial of $\neg(\neg P \wedge Q)$.

(b) $P \leftrightarrow Q$ৰ সত্যতা নিৰূপণ সাৰণি প্ৰস্তুত কৰা। 2

Prepare the truth table for $P \leftrightarrow Q$.

(c) প্ৰতীক চিহ্নৰ সৈতে বাক্য সংযোজকবোৰ তালিকাবদ্ধ কৰা। 2

List the sentential connectives with their symbols.

(d) গাণিতিক প্ৰতিৰূপ ব্যৱহাৰ কৰি, দেখুওৱা যে

Using arithmetic representation, show that

$$\models p \vee \neg p$$ 2

(e) প্ৰমাণ কৰা

Prove that

$$\models A \leftrightarrow B \text{ iff } A \text{ eq } B$$ 3

2. (a) তলৰ যুক্তিৰ সাৰ্থকতা নিৰূপণ কৰা : 5

Determine the validity of the following argument :

$$p \to \neg q,\ r \to q,\ r \models \neg p$$

(b) কণ্ট্ৰাডিক্‌শন বুলিলে কি বুজা? এটা উদাহৰণ দিয়া। 2

What do you mean by contradiction? Give one example.

3. (a) শুদ্ধ অথবা অশুদ্ধ লিখা : 1+1=2

Write True or False :

(i) প্ৰত্যেকটো চেইন এটা লেটিচ্‌।

Every chain is a lattice.

(ii) $(\mathscr{P}\{a, b, c\}, \subseteq)$ আৰু $(D_{30}, |)$ লেটিচ্‌ দুটা আইছ'মৰ্ফিক।

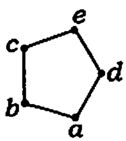
The two lattices $(\mathscr{P}\{a, b, c\}, \subseteq)$ and $(D_{30}, |)$ are isomorphic.

(b) লেটিচ্‌ৰ বীজগণিতীয় ব্যৱস্থা হিচাপে সংজ্ঞা দিয়া। 2

Define lattice as an algebraic system.

(c) উপযুক্ত কাৰণ দৰ্শাই তলত দিয়া লেটিচ্‌টো পৰিপূৰক বিশিষ্ট লেটিচ্‌ হয় নে নহয় নিৰূপণ কৰা :

Determine with proper reason whether the following lattice is complemented or not :



এইটো এটা বিভাজক লেটিচ্‌ হ'ব নে? 3+1=4

Is it a distributive lattice?

(d) সাব্‌-লেটিচ্‌ৰ সংজ্ঞা দিয়া । 2

Define sub-lattice.

4. (a) চাৰিটা উপাদান থকা বুলিয়ান এলজেব্ৰাব 'হেশ্ব্‌' চিত্ৰ অংকন কৰা । 3

Draw the Hasse diagram of a Boolean algebra with four elements.

(b) ধৰা B এটা বুলিয়ান এলজেব্ৰা আৰু $a, b \in B$. প্ৰমাণ কৰা যে $a \cdot (a' + b) = a \cdot b$. 3

Let B be a Boolean algebra and $a, b \in B$. Prove that $a \cdot (a' + b) = a \cdot b$.

(c) তিনিটা চলক x, y, zৰ সকলো মিন্‌টাৰ্মবোৰ লিখা । 2

Write all the minterms of three variables x, y, z.

(d) তলৰ বুলিয়ান ৰাশিৰ পূৰণফলৰ সমষ্টিৰ কেন'নিকেল ৰূপ নিৰ্ণয় কৰা : 4

Obtain the sum-of-products in canonical form of the following Boolean expression :

$$(x_1 + x_2) x_3$$

(e) কাৰণ'-চিত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি তলত দিয়া বুলিয়ান ফলনক ক্ষুদ্ৰতম পূৰণফলৰ সমষ্টি হিচাপে প্ৰকাশ কৰা : 3

Find a minimal sum of products representation of the following Boolean function using Karnaugh map :

$$ab\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$$

(f) যদি B এটা বুলিয়ান এলজেব্ৰা হয় আৰু $a \in B$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা $S = \{0, a, a', 1\}$, Bৰ এটা বুলিয়ান সাব-এলজেব্ৰা হ'ব। 3

If B is a Boolean algebra and $a \in B$, then prove that $S = \{0, a, a', 1\}$ is a Boolean subalgebra of B.

(b) Metric Space

(*Marks* : 35)

5. *(a)* এটা অশূন্য সংহতি Xত ডিছক্ৰিট মেট্ৰিকৰ সংজ্ঞা দিয়া। 2

Define the discrete metric on a non-empty set X.

(b) এটা মেট্ৰিক ক্ষেত্ৰৰ এটা উপসমষ্টিত থকা এটা বিন্দুক কেতিয়া বিচ্ছিন্ন বিন্দু (isolated point) বুলি কোৱা হয়? 2

When a point is said to be an isolated point of a subset in a metric space?

(c) এটা মেট্ৰিক ক্ষেত্ৰত এটা উপসমষ্টিৰ ব্যাস বুলিলে কি বুজা? যদি বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি $\mathbb{R}$ত মেট্ৰিক d বৰ্ণনা কৰা হয়, তলত দিয়া ধৰণে

$$d(x, y) = |x - y|, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

তেন্তে $\mathbb{R}$ৰ উপসমষ্টি $A = [0, 2]$ৰ ব্যাস নিৰ্ণয় কৰা। 1+1=2

What do you understand by diameter of a subset of a metric space? If d is metric defined on $\mathbb{R}$ as

$$d(x, y) = |x - y|, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

then find the diameter of the subset $A = [0, 2]$ of $\mathbb{R}$.

(d) প্ৰমাণ কৰা যে, মেট্ৰিক ক্ষেত্ৰত যি কোনো মুক্ত গোলক এটা মুক্ত সমষ্টি। 4

Prove that in a metric space, each open sphere is an open set.

(e) প্ৰমাণ কৰা যে মেট্ৰিক ক্ষেত্ৰত এটা উপসংহতি বন্ধ হ'ব যদি আৰু যদিহে ইয়াৰ পূৰক মুক্ত। 5

Prove that in a metric space, a subset is closed if and only if its complement is open.

6. (a) শুদ্ধ অথবা অশুদ্ধ লিখা : 1

Write True or False :

প্ৰচলিত মেট্ৰিক ক্ষেত্ৰ $\mathbb{R}$ত পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতি Q এটা নিবিড় সংহতি।

The set Q of rationals is dense in the usual metric space $\mathbb{R}$.

(b) এটা উদাহৰণৰ সৈতে সম্পূৰ্ণ মেট্ৰিক ক্ষেত্ৰৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1+1=2

Define complete metric space with an example.

(c) প্ৰমাণ কৰা যে, যি কোনো মেট্ৰিক ক্ষেত্ৰত প্ৰতিটো অভিসাৰী অনুক্ৰমেই ক'ছি অনুক্ৰম। ইয়াৰ বিপৰীত সিদ্ধান্তটো সত্য নে? 2+1=3

Prove that every convergent sequence in a metric space is a Cauchy sequence. Is the converse true?

(*d*) প্ৰমাণ কৰা : 6

Prove that :

ধৰি লওঁ, সম্পূৰ্ণ মেট্ৰিক ক্ষেত্ৰ Xৰ Y এটা উপক্ষেত্ৰ। উপক্ষেত্ৰ Yক সম্পূৰ্ণ মেট্ৰিক ক্ষেত্ৰ বোলা হয়, যদি আৰু যদিহে ই এটা বন্ধ-সমষ্টি হয়।

Let X be a complete metric space and Y be a subspace of X. Then Y is complete if and only if it is closed.

7. (*a*) এটা মেট্ৰিক ক্ষেত্ৰৰ পৰা আন এটা মেট্ৰিক ক্ষেত্ৰলৈ বৰ্ণনা কৰা ফলন এটাক কেতিয়া অনৱচ্ছিন্ন ফলন বোলা হয়? 2

When is a mapping of one metric space to another metric space said to be continuous?

(*b*) ধৰি লওঁ X আৰু Y দুটা মেট্ৰিক ক্ষেত্ৰ। প্ৰমাণ কৰা Yত Xৰ ফলন fক অনৱচ্ছিন্ন বোলা হয়, যদি আৰু যদিহে সমষ্টি Yত G খোলা হয়, তেন্তে সমষ্টি X তো $f^{-1}(G)$ খোলা। 6

Let X and Y be two metric spaces. Prove that a mapping f of X into Y is continuous if and only if $f^{-1}(G)$ is open in X whenever G is open in Y.

★★★