1 SEM TDC MTH G 1

2021

(March)

MATHEMATICS

(General)

Course : 101

[A : Classical Algebra, B : Trigonometry, C : Vector Calculus]

Full Marks : 80

Pass Marks : 32/24

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

(A : Classical Algebra)

(*Marks* : 40)

1. (a) শূন্য অনুক্রমৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define null sequence.

(b) এটা অনুক্রমৰ অভিসাৰিতা সম্বন্ধীয় ক'চিৰ সাধাৰণ সূত্ৰটো লিখা। 2

State Cauchy's general principle of convergence of a sequence.

(c) দেখুওৱা যে অনুক্ৰম $\{S_n\}$ অভিসাৰী, য'ত $S_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. 3

Show that the sequence $\{S_n\}$ is convergent, where $S_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

(d) প্ৰমাণ কৰা যে $\{S_n\}$ অনুক্ৰমটো অভিসাৰী, য'ত $S_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}, \; n \in \mathbb{N}$. 4

Prove that the sequence $\{S_n\}$ is convergent, where $S_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}, \; n \in \mathbb{N}$.

অথবা / *Or*

যদি $\{S_n\}$ এটা অনুক্ৰম আৰু $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{S_{n+1}}{S_n} \right| = l$, য'ত $0 \le l \le 1$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = 0$.

If $\{S_n\}$ be a sequence and $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{S_{n+1}}{S_n} \right| = l$, where $0 \le l \le 1$, then prove that $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = 0$.

2\. *(a)* যোগাত্মক শ্ৰেণী কাক বোলে? 1

What is called positive series?

(b) এটা অসীম শ্ৰেণী অভিসাৰী হোৱা লিবনিট্‌জ পৰীক্ষাৰ চৰ্ত উল্লেখ কৰা। 2

State the condition of Leibnitz's test for convergence of an infinite series.

(c) তলৰ যি কোনো দুটাৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা : 6×2=12

Test for convergence of any *two* of the following :

(i) $1+\frac{3}{7}x+\frac{3\cdot 6}{7\cdot 10}x^2+\frac{3\cdot 6\cdot 9}{7\cdot 10\cdot 13}x^3+\ldots$ to ∞

(ii) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{2^2}{3^3}+\frac{3^3}{4^4}+\ldots$ to ∞

(iii) $\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^3}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^4}{7}+\ldots$ to ∞

$x>0$

(iv) $\left(\frac{2^2}{1^2}-\frac{2}{1}\right)^{-1}+\left(\frac{3^3}{2^3}-\frac{3}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{4^4}{3^4}-\frac{4}{3}\right)^{-3}+\ldots$ to ∞

3. *(a)* যদি $f(x)=0$ সমীকৰণৰ h এটা মূল হয়, তেন্তে $f(x)$ৰ এটা উৎপাদক লিখা। 1

If h be a root of an equation $f(x)=0$, then write a factor of $f(x)$.

(b) ডেকাৰ্টৰ নিয়মৰ সহায়ত $x^4+3x^2+2x-7=0$ সমীকৰণৰ মূলসমূহৰ প্ৰকৃতি নিৰ্ণয় কৰা। 2

Find the nature of roots of the equation $x^4+3x^2+2x-7=0$ by Descarte's rule.

(c) যদি α, β, γ $x^3+px^2+qx+r=0$ সমীকৰণৰ মূল হয়, তেন্তে $\Sigma\alpha^2$ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা। 2

If α, β, γ are the roots of the equation $x^3+px^2+qx+r=0$, then find $\Sigma\alpha^2$.

(d) কাৰ্ডনৰ নিয়মেৰে সমাধান কৰা (যি কোনো এটা) : 5

Solve by Cardan's method (any *one*) :

(i) $x^3-12x+65=0$

(ii) $x^3-30x+133=0$

(e) $6x^3 - 11x^2 - 3x + 2 = 0$ সমীকৰণটো সমাধান কৰা, যদি মূলকেইটা হৰাত্মক প্ৰগতিত থাকে। 5

Solve the equation $6x^3 - 11x^2 - 3x + 2 = 0$, if the roots are in harmonic progression.

অথবা / *Or*

$x^3 + px - q = 0$ সমীকৰণৰ যদি α, β, γ মূল হয়, তেন্তে $\alpha^2 + \beta^2$, $\beta^2 + \gamma^2$, $\gamma^2 + \alpha^2$ মূলবিশিষ্ট সমীকৰণটো নিৰ্ণয় কৰা।

If α, β, γ are the roots of $x^3 + px - q = 0$, then find the equation whose roots are $\alpha^2 + \beta^2$, $\beta^2 + \gamma^2$, $\gamma^2 + \alpha^2$.

(B : Trigonometry)

(*Marks* : 25)

4. (a) মান লিখা : 1

$$(\cos\theta - i\sin\theta)^{m/n}$$

Write down the value of

$$(\cos\theta - i\sin\theta)^{m/n}$$

(b) যদি $x_r = \cos\frac{\pi}{2^r} + i\sin\frac{\pi}{2^r}$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $x_1x_2x_3 \ldots \text{to } \infty = 1$. 2

If $x_r = \cos\frac{\pi}{2^r} + i\sin\frac{\pi}{2^r}$, then prove that $x_1x_2x_3 \ldots \text{to } \infty = 1$.

(c) দেখুওৱা যে

$$(a+ib)^{m/n} + (a-ib)^{m/n} = 2(a^2+b^2)^{m/2n}\cos\left(\frac{m}{n}\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$ 5

Show that

$$(a+ib)^{m/n} + (a-ib)^{m/n} = 2(a^2+b^2)^{m/2n}\cos\left(\frac{m}{n}\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

অথবা / *Or*

প্ৰমাণ কৰা যে

$$\cos 7\theta = 64\cos^7\theta - 112\cos^5\theta + 56\cos^3\theta - 7\cos\theta$$

Prove that

$$\cos 7\theta = 64\cos^7\theta - 112\cos^5\theta + 56\cos^3\theta - 7\cos\theta$$

5. *(a)* মান লিখা :

$$e^{2n\pi i},\ n \in Z$$ 1

Write the value of

$$e^{2n\pi i},\ n \in Z$$

(b) দেখুওৱা যে

$$\log(1+e^{\theta}) = \log\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right) + i\frac{\theta}{2}$$ 4

Show that

$$\log(1+e^{\theta}) = \log\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right) + i\frac{\theta}{2}$$

অথবা / Or

π^iৰ বাস্তৱ আৰু কাল্পনিক অংশ পৃথক কৰা।

Separate π^i into real and imaginary parts.

6. গ্ৰেগৰিৰ শ্ৰেণীটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা। 4

State and prove Gregory's series.

অথবা / *Or*

যদি $x < \sqrt{2} - 1$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$2\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots\right) = \frac{2x}{1-x^2} - \frac{1}{3}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^5 - \dots$$

If $x < \sqrt{2} - 1$, then prove that

$$2\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots\right) = \frac{2x}{1-x^2} - \frac{1}{3}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^5 - \dots$$

7. *(a)* প্ৰমাণ কৰা যে

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$ 1

Prove that

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

(b) $\cos(x+iy)$ক $A+iB$ আকাৰত প্ৰকাশ কৰা। 2

Express $\cos(x+iy)$ in the form $A+iB$.

(c) তলৰ শ্ৰেণীৰ সমষ্টি নিৰ্ণয় কৰা (যি কোনো এটা) : 5

Find the sum of the following series (any *one*) :

(i) $a\cos\alpha - \frac{a^2}{2}\cos 2\alpha + \frac{a^3}{3}\cos 3\alpha - \ldots$

(ii) $\sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha + \sin^2 3\alpha + \ldots + \sin^2 n\alpha$

(iii) $1 + \cos\alpha + \frac{\cos 2\alpha}{2!} + \frac{\cos 3\alpha}{3!} + \ldots$ to ∞

(C : Vector Calculus)

(*Marks* : 15)

8. *(a)* ভেক্টৰ বিন্দু ফলনৰ অবিচ্ছিন্নতাৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define continuity of a vector point function.

(b) তলৰ ৰাশিটো শুদ্ধকৈ লিখা : 1

Write the following expression correctly :

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt} + \vec{B} \times \frac{d\vec{A}}{dt}$$

(c) যদি $\vec{A}=t^2\hat{i}-t\hat{j}+(2t+1)\hat{k}$ আৰু $\vec{B}=(2t-3)\hat{i}+\hat{j}-t\hat{k}$ হয়, তেন্তে $\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B})$ নিৰ্ণয় কৰা। 2

If $\vec{A}=t^2\hat{i}-t\hat{j}+(2t+1)\hat{k}$ and $\vec{B}=(2t-3)\hat{i}+\hat{j}-t\hat{k}$, then find $\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B})$.

(d) যদি $\vec{f}=x^2z\hat{i}-2y^3z^2\hat{j}+xy^2z\hat{k}$ হয়, তেন্তে (1, −1, 1) বিন্দুত $\nabla\cdot\vec{f_i}$ আৰু $\nabla\times\vec{f}$ নিৰ্ণয় কৰা। 3

If $\vec{f}=x^2z\hat{i}-2y^3z^2\hat{j}+xy^2z\hat{k}$, then determine $\nabla\cdot\vec{f_i}$ and $\nabla\times\vec{f}$ at (1, −1, 1).

(e) তলৰ যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ কৰা : 4×2=8

Answer any *two* of the following :

(i) প্ৰমাণ কৰা যে

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$$

Prove that

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$$

(ii) প্ৰমাণ কৰা যে $\nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2}$, য'ত $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, $r = |\vec{r}|$.

Prove that $\nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2}$, where $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, $r = |\vec{r}|$.

(iii) প্ৰমাণ কৰা যে

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

Prove that

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

★★★